1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 25 mars 2013 (30 min)

Prénom et nom : ……………………………………………………….

Note : …… /20

I. (8 points)

Une urne contient deux boules noires et huit boules blanches. Un joueur tire successivement au hasard avec remise quatre boules de l'urne.
Tirer une boule blanche lui rapporte 2 points, tirer une boule noire lui en fait perdre 4.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le nombre de points obtenus par le joueur.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision :

X suit la loi ………………………………………………………………………………………………………..

2°) Exprimer G en fonction de X.

G = …………………. (un seul résultat sous forme réduite)

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

E (G) = ………………   V(G) = ………………

II. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n+1}.

…………………………

2°) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (on admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq 0$).
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

…………………………

III. (6 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(u_n+1)^2}$.

Calculer les valeurs de u_1, u_2, u_3 (valeurs exactes sous forme de fractions irréductibles).

$u_1 =$ ....

$u_2 =$ ....

$u_3 =$ ....

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 400 - n^2$.

On note **R** sa représentation graphique dans le plan P muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Par définition, **R** est donc l'ensemble des points $M_n(n\ ;\ u_n)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

En utilisant les symboles usuels des ensembles, on peut écrire : **R** = $\{ M_n(n\ ;\ u_n) \in P,\ n \in \mathbb{N} \}$ (écriture de l'ensemble par compréhension).

Combien y a-t-il de points de la représentation graphique situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses ?

……………. (répondre sans justifier)

Bonus à traiter s'il reste du temps

On reprend la suite du **III**.

De quel nombre le terme u_n semble se rapprocher lorsque n devient de plus en plus grand ?
On pourra utiliser la calculatrice pour le calcul des termes.

Il semble que u_n se rapproche de ………. lorsque n devient de plus en plus grand.

Corrigé

I.

Une urne contient deux boules noires et huit boules blanches. Un joueur tire successivement au hasard avec remise quatre boules de l'urne.
Tirer une boule blanche lui rapporte 2 points, tirer une boule noire lui en fait perdre 4.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le nombre de points obtenus par le joueur.

1°) X suit la **loi binomiale de paramètres n = 4 et p = 0,8**.

2°) **Exprimons G en fonction de X.**

G = **6X – 16**

3°) **Calculons l'espérance mathématique et la variance de G.**

E (G) = **3,2** V(G) = **23,04**

Explications :

2°)

G = 2X – 4 (4 – X)
= 6X – 16

3°) On applique les formules d'effet d'une transformation affine sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.

X est une variable aléatoire sur un univers probabilisé (Ω, *P*).

a et *b* sont deux réels (ce sont des coefficients constants).

On a :

- $E(aX+b) = a\,E(X) + b$ (linéarité de l'espérance)
- $V(aX+b) = a^2\ V(X)$
- $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$

On commence par calculer l'espérance et la variance de X avec les formules du cours donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

$E(X) = 4\times 0,8 = 3,2$
$V(X) = 4\times 0,8\times 0,2 = 0,64$

$E(G) = 6E(X) - 16 = 6\times 3,2 - 16 = 3,2$

$V(G) = 6^2\,V(X) = 36\times 0,64 = 23,04$

II.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

1°) **Exprimons u_n en fonction de u_{n+1}.**

$$\mathbf{u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - 1}$$

Explication :

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \text{ donc } 1+u_n = \frac{1}{u_{n+1}} \text{ d'où } u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$$

2°) $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\mathbf{v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}}$$

Explication :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1+u_n}} = 1+u_n = 1+\frac{1}{v_n}$$

III.

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(u_n+1)^2} \end{cases}$$

Calculons les valeurs de u_1, u_2, u_3.

$$u_1 = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{4}{25}$$

$$u_3 = \frac{100}{841}$$

IV.

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 400 - n^2$

R : représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan P muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

R = { $M_n(n\ ;\ u_n) \in P, n \in \mathbb{N}$ }

Combien y a-t-il de points de la représentation graphique situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses ?

20

Explication :

On cherche n tel que $u_n > 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 400 - n^2 > 0$

$\Leftrightarrow n^2 < 400$

$\Leftrightarrow -20 < n < 20$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant n < 20$ $(n \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 19$

Les points de la représentation graphique de la suite (u_n) sont ceux pour lesquels $0 \leqslant n \leqslant 19$.
Il y a donc 20 points situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

Bonus

On reprend la suite du **III**.

De quel nombre le terme u_n semble se rapprocher lorsque n devient de plus en plus grand ?

Il semble que u_n se rapproche de **0** lorsque n devient de plus en plus grand.