TS — Exercices sur la loi exponentielle

Il n'y a quasiment pas de rédaction à mettre pour ces exercices.

1 La durée de vie d'un composant électronique en heures est modélisée par la loi de probabilité exponentielle P de paramètre $\lambda = 0{,}0006$ sur $[0\,;+\infty[$.
Donner la valeur exacte de chaque probabilité puis donner la valeur arrondie au millième à l'aide de la calculatrice.
1°) Calculer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 1000 heures.
2°) Calculer la probabilité qu'un composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures.

2 On note P la loi de probabilité exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$ avec $\lambda > 0$.
Déterminer la valeur exacte de λ sachant que $P([0\,;70]) = 0{,}05$.

3 On note P la loi de probabilité exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$ avec $\lambda > 0$.
Déterminer t tel que $P([0\,;t]) = P([t\,;+\infty[)$.

4 On note P la loi de probabilité exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$ avec $\lambda > 0$.
1°) Calculer λ tel que $P([1\,;+\infty[) = \dfrac{1}{2}$.
2°) Dans cette question, on garde la valeur de λ qui a été trouvée à la question précédente.
Calculer $P([3\,;5])$.

5 On suppose que la durée d'une conversation téléphonique mesurée en minutes est modélisée par la loi exponentielle P de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$ sur $[0\,;+\infty[$.
Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.
Quelle est la probabilité que vous attendiez
1°) plus de 10 minutes ?
2°) entre 10 et 20 minutes ?

6 Le laboratoire d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
1°) Sachant que $P(X > 10) = 0{,}286$, donner la valeur arrondie au millième de λ.
Pour les questions 2°) et 3°), on prendra 0,125 pour valeur de λ.
2°) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure ou égale à 6 mois (valeur exacte puis valeur arrondie au millième).
3°) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie strictement supérieure à dix ans ? Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.
4°) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.
Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie strictement supérieure à 10 ans ?
Donner la valeur approchée au millième.
5°) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit strictement supérieure à 0,999 ?

7 **QCM**

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité P de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de paramètre λ. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0\,;t[$, notée $P([0\,;t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t (t en années).

1°) Pour $t \geqslant 0$, la valeur de $P([t\,;+\infty[)$ est

A : $1-e^{-\lambda t}$ B : $e^{-\lambda t}$ C : $1+e^{-\lambda t}$

2°) La valeur de t pour laquelle on a $P([0\,;t[) = P([t\,;+\infty[)$ est

A : $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ B : $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ C : $\dfrac{\lambda}{2}$

3°) D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors

A : $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ B : $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ C : $\dfrac{\ln 82}{\ln 100}$

8 On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité P de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $P([0\,;t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx$.
Une étude statistique a montré qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, ce qui permet de poser $P([0\,;200[) = 0{,}5$.

1°) Déterminer la valeur exacte de λ.
2°) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième.
3°) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{A} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{A} \lambda x\, e^{-\lambda x}\,dx$.

b) En déduire d_m (on détaillera bien le calcul de limite) ; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à une semaine près.

Corrigé

1 1°) $P\left(\left[0\,;1000\right]\right)=1-\mathrm{e}^{-0,6}=0,451...$

trois petits points (car on a mis le signe =)

On peut aussi écrire $P\left(\left[0\,;1000\right]\right)\approx 0,451$ mais il faut ajouter entre parenthèses à droite « valeur arrondie au millième ».

Il faut remarquer que la notion de chiffres significatifs n'est pas une notion mathématique. C'est une notion propre à la physique.

2°) $P\left(\left[500\,;+\infty\right[\right)=\mathrm{e}^{-0,3}=0,740...$

Solution détaillée :

On note P la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,0006$ sur $[0\,;+\infty[$.

1°) **Calculons la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 1000 heures.**

$P\left(\left[0\,;1000\right]\right)=\displaystyle\int_0^{1000}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{1000}=-\mathrm{e}^{-1000\lambda}+\mathrm{e}^{-0\lambda}=1-\mathrm{e}^{-1000\lambda}=1-\mathrm{e}^{-1000\times 0,0006}=1-\mathrm{e}^{-0,6}$ (valeur exacte)

D'après la calculatrice, $P\left(\left[0\,;1000\right]\right)\approx 0,451$ (valeur arrondie au millième)

2°) **Calculons la probabilité qu'un composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures.**

$P\left(\left[500\,;+\infty\right[\right)=\displaystyle\int_{500}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\longrightarrow$ pas cette année

$P\left(\left[500\,;+\infty\right[\right)=1-P\left(\left[0\,;500\right[\right)=1-\displaystyle\int_0^{500}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{500}=1+\mathrm{e}^{-500\lambda}-\mathrm{e}^{-0\lambda}=1+\mathrm{e}^{-500\lambda}-1=\mathrm{e}^{-500\lambda}$

$=\mathrm{e}^{-500\times 0,0006}=\mathrm{e}^{-0,3}=0,740...$

D'après la calculatrice, $P\left(\left[500\,;+\infty\right[\right)\approx 0,741$ (valeur arrondie au millième)

2 $\lambda=-\dfrac{\ln 0,95}{70}$

Solution détaillée :

Déterminons λ tel que $P\left(\left[0\,;70\right]\right)=0,05$ (1).

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \int_0^{70}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=0,05\\
&\Leftrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{70}=0,05\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-70\lambda}+\mathrm{e}^{-0\lambda}=0,05\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-70\lambda}+1=0,05\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-70\lambda}=0,05-1\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-70\lambda}=0,95\\
&\Leftrightarrow -70\lambda=\ln 0,95\\
&\Leftrightarrow \lambda=-\frac{\ln 0,95}{70}
\end{aligned}
$$

λ doit être strictement positif ce qui est le cas car $\ln(0,95)<0$ (puisque $0<0,95<1$).

3 $t=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (temps de demi-vie)

Solution détaillée :

Déterminons t tel que $P\left(\left[0\,;t\right]\right)=P\left(\left[t\,;+\infty\right[\right)$ (1).

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow P\left(\left[0\,;t\right]\right)=1-P\left(\left[0\,;t\right[\right)\\
&\Leftrightarrow P\left(\left[0\,;t\right]\right)=1-P\left(\left[0\,;t\right]\right)\\
&\Leftrightarrow 2P\left(\left[0\,;t\right]\right)=1\\
&\Leftrightarrow P\left(\left[0\,;t\right]\right)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \int_0^{t}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{t}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-\lambda t}+\mathrm{e}^{-0\lambda}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-\lambda t}+1=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\lambda t=\ln\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\lambda t=-\ln 2\\
&\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ 1°) $\lambda = \ln 2$; 2°) $P\left(\left[3\,;5\right]\right) = e^{-3\ln 2} - e^{-5\ln 2} = \dfrac{1}{e^{3\ln 2}} - \dfrac{1}{e^{5\ln 2}} = \dfrac{1}{e^{\ln\left(2^3\right)}} - \dfrac{1}{e^{\ln\left(2^5\right)}} = \dfrac{1}{2^3} - \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{3}{32}$

Solution détaillée :

1°) $P\left(\left[1\,;+\infty\right[\right) = \dfrac{1}{2}$ (1)

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1 - P\left(\left[0\,;1\right[\right) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow P\left(\left[0\,;1\right[\right) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow P\left(\left[0\,;1\right]\right) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -e^{-\lambda} + e^{-0\times\lambda} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -e^{-\lambda} + 1 = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\lambda = \ln\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\lambda = -\ln 2\\
&\Leftrightarrow \lambda = \ln 2
\end{aligned}
$$

2°)

$$P\left(\left[3\,;5\right]\right) = \int_3^5 \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = e^{-3\ln 2} - e^{-5\ln 2}$$

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$P\left(\left[3\,;5\right]\right) = \frac{1}{e^{3\ln 2}} - \frac{1}{e^{5\ln 2}} = \frac{1}{e^{\ln\left(2^3\right)}} - \frac{1}{e^{\ln\left(2^5\right)}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

$$P\left(\left[3\,;5\right]\right) = \left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

3$^{\text{e}}$ méthode :

$$P\left(\left[3\,;5\right]\right) = \left(e^{\ln 2}\right)^{-3} - \left(e^{\ln 2}\right)^{-5} = 2^{-3} - 2^{-5} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

On utilise la définition (propriété du cours ?) : $e^{a\ln b} = b^a$ (a réel quelconque, b réel strictement positif)

$\boxed{5}$ 1°) $P\left(\left]10\,;+\infty\right[\right) = \dfrac{1}{e} = 0{,}3...$; 2°) $P\left(\left[10\,;20\right]\right) = e^{-1} - e^{-2} = 0{,}2...$

Solution détaillée :

1°) $P\left(\left]10\,;+\infty\right[\right) = 1 - P\left(\left[0\,;10\right]\right) = 1 - \displaystyle\int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10} = \cancel{1} + e^{-10\lambda} \cancel{-e^{0\lambda}} = e^{-10\times\frac{1}{10}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} = 0{,}367...$

2°) $P\left(\left[10\,;20\right]\right) = \displaystyle\int_{10}^{20} \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{10}^{20} = -e^{-20\lambda} + e^{-10\lambda} = -e^{-20\times\frac{1}{10}} + e^{-10\times\frac{1}{10}} = -e^{-2} + e^{-1} = 0{,}232...$

$\boxed{6}$

1°) **$P\left(X > 10\right) = 0{,}286$ (1)**

Déterminons λ.

On a : $P\left(\left]10\,;+\infty\right[\right) = 1 - P\left(\left[0\,;10\right]\right) = 1 - \displaystyle\int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10} = 1 + e^{-10\lambda} - e^0 = e^{-10\lambda}$

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0{,}286\\
&\Leftrightarrow -10\lambda = \ln 0{,}286\\
&\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}286}{10}
\end{aligned}
$$

Avec la calculatrice, on trouve $\lambda \approx 0{,}125$ (valeur arrondie au millième).

2°) **Calculons la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure ou égale à 6 mois.**

$$P\left(\left[0\,;0{,}5\right]\right) = \int_0^{0{,}5} \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{0{,}5} = -e^{-0{,}5\lambda} + e^{-0\lambda} = 1 - e^{-0{,}0625} \quad \text{(valeur exacte)}$$

3°) **Calculons la probabilité qu'un appareil ait une durée de vie strictement supérieure à dix ans sachant qu'il a déjà fonctionné huit années.**

$$P\left(X > 10\ /\ X > 8\right) = \frac{P\left(\left(X > 10\right) \cap \left(X > 8\right)\right)}{P\left(X > 8\right)} = \frac{P\left(X > 10\right)}{P\left(X > 8\right)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-10\lambda + 8\lambda} = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}25} \quad \text{(valeur exacte)}$$

$\left(X > 10\right) \subset \left(X > 8\right)$ donc $\left(X > 10\right) \cap \left(X > 8\right) = \left(X > 10\right)$

ou

$$P\left(\left[10\,;+\infty\right[\ /\left[8\,;+\infty\right[\right) = \frac{P\left(\left[10\,;+\infty\right[\cap \left[8\,;+\infty\right[\right)}{P\left(\left[8\,;+\infty\right[\right)} = \frac{P\left(\left[10\,;+\infty\right[\right)}{P\left(\left[8\,;+\infty\right[\right)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-10\lambda + 8\lambda} = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}25}$$

Valeur arrondie …

N.B. : on peut aussi utiliser la propriété de durée de vie sans vieillissement.

$$P\left(X > 10\ /\ X > 8\right) = P\left(X > 2\right) = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}25}$$

4°) **Calculons la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie strictement supérieure à 10 ans.**

Soit Y le nombre d'oscilloscopes ayant une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans.
Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}286$.

$$
\begin{aligned}
P\left(Y \geqslant 1\right) &= 1 - P\left(Y = 0\right)\\
&= 1 - \binom{15}{0} \times \left(1 - 0{,}286\right)^{15} \times 0{,}286^0\\
&= 1 - 0{,}714^{15}\\
&= 0{,}993...
\end{aligned}
$$

N.B. : Il n'est pas forcément utile de faire appel à la loi binomiale ; on écrit directement :
$P(\mathrm{Y} \geqslant 1) = 1 - 0{,}714^{15} = 0{,}993...$

5°) **Déterminons le nombre d'oscilloscopes que l'établissement devrait acheter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit strictement supérieure à 0,999.**

On cherche les entiers naturels n tels que $1 - 0{,}714^n > 0{,}999$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 0{,}714^n < 0{,}001$

On utilise le logarithme népérien.

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}714^n\right) < \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n \ln(0{,}714) < \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}714)}$ (on change le sens de l'inégalité car on divise les deux membres par $\ln(0{,}714)$ qui est strictement négatif)

D'après la calculatrice, on a : $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}714)} = 20{,}5055593...$.

On trouve $n \geqslant 21$.

L'établissement devrait acheter au moins 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit strictement supérieure à 0,999.

$\boxed{7}$ 1°) B ; 2°) A ; 3°) A

Solution détaillée :

1°) $P([t\,;+\infty[) = 1 - P([0\,;t[)$ (1)

$$= 1 - \int_0^t \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$$

$$= 1 - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

2°) On cherche la valeur de t pour laquelle on a : $P([0\,;t[) = P([t\,;+\infty[)$ (1).

On sait que pour tout réel t strictement positif, on a $P([0\,;t[) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P([t\,;+\infty[) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

(1) $\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow 1 = 2\mathrm{e}^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{-\lambda t} = \ln \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

3°) On sait que $P([0\,;1[) = 0{,}18$ (2).

Or pour tout réel t strictement positif, on a : $P([0\,;t[) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Donc

(2) $\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}18$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}82$

$\Leftrightarrow -\lambda = \ln 0{,}82$

$\Leftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}82$

Or $-\ln(0{,}82) = \ln \dfrac{1}{0{,}82} = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{82}{100}}\right) = \ln \dfrac{100}{82} = \ln \dfrac{50}{41}$.

$\boxed{8}$

1°) **Déterminons la valeur exacte de λ.**

On sait que $P([0\,;200[) = 0{,}5$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{200} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{200} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-200\lambda} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-200\lambda} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$

2°) **Calculons la probabilité qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines.**

$$P([300\,;+\infty[) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln 2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right)}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(valeur exacte)}$$

$$= 0{,}353553390593...$$

$P([300\,;+\infty[) \approx 0{,}354$ (valeur arrondie au millième)

3°)

a) **Calculons $\int_0^{A} \lambda x \; e^{-\lambda x} \; dx$.**

On utilise une IPP.

On pose : $u(x) = \lambda x$ $\qquad v(x) = -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$u'(x) = \lambda$ $\qquad v'(x) = e^{-\lambda x}$

$$\int_0^{A} \lambda x \; e^{-\lambda x} dx = \left[\cancel{\lambda} x \times \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}} \right) \right]_0^{A} - \int_0^{A} \cancel{\lambda} \times \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}} \right) dx$$

$$= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{A} - \int_0^{A} \left(-e^{-\lambda x} \right) dx$$

$$= -A \; e^{-\lambda A} + 0 - \int_0^{A} \left(-e^{-\lambda x} \right) dx$$

$$= -A \; e^{-\lambda A} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{A}$$

$$= \frac{-\lambda A \; e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

b) **Déduisons-en d_m.**

$d_m = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{A} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ donc $d_m = \lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

On pose $X = \lambda A$.

$$d_m = \lim_{X \to +\infty} \frac{-X \; e^{-X} - e^{-X} + 1}{\lambda}$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \left(X \; e^{-X} \right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^{X}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^{X}}{X}} = 0$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^{X}}{X} = +\infty$ (limite de référence)

$\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$

Donc $d_m = \dfrac{1}{\lambda}$.

D'où $d_m = \dfrac{200}{\ln 2}$ (valeur exacte) soit $d_m \approx 288$ (valeur arrondie à l'unité).