TS1

Contrôle du jeudi 21 mars 2013 (50 minutes)

Prénom : …………………………………………… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (6 points)

Calculer les intégrales suivantes (un seul résultat à chaque fois, en valeur exacte).

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J}=\int_{0}^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+4}}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{K}=\int_{0}^{\ln 2} \frac{\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{5}}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x.$$

I = ……………… J = ……………… K = ………………

II. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left|\mathrm{e}^{x}-1\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit a un réel positif ou nul.

Démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{-a}-2$.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 4 cm.

On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 sous la courbe sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

À l'aide du 1°), donner la valeur arrondie au centième de $\mathcal{A}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (1 point)

On considère la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} \ln\left(\mathrm{e}^{t}+1\right)\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

Calculer $\mathrm{F}'(x)$ sans justifier.

$\mathrm{F}'(x)=$ ………………………………

IV. (4 points)

Soit n un entier naturel non nul fixé.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in [n\,;n+1]$, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

2°) En déduire à l'aide d'une intégrale que l'on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

V. (5 points)

1°) Déterminer sans justifier la forme exponentielle du nombre complexe $\mathrm{i}\sqrt{3}-1$.

2°) Soit z un nombre complexe non nul. On note θ un argument de z.

a) Déterminer un argument du nombre $Z=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{z^2}$ en fonction de θ (détailler les étapes de calcul).

b) En déduire pour quelles valeurs de θ le nombre Z est réel.

1°) $\mathrm{i}\sqrt{3}-1=$ ....

2°) ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bonus à traiter sur copie s'il reste du temps :

Calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-3}^{5}\left(|x+1|+|4-2x|\right)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé du contrôle du 21-3-2013

I.

$$\mathbf{I}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=\Big[\ln\left|1-\cos x\right|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(forme } \frac{u'}{u}\text{)}$$

$$=\ln\left|1-\cos\frac{\pi}{2}\right|-\ln\left|1-\cos\frac{\pi}{3}\right|$$

$$=0-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln 2$$

$$\mathbf{J}=\int_{0}^{\ln 5}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{J}=\Big[2\sqrt{\mathrm{e}^{x}+4}\Big]_{0}^{\ln 5} \qquad \text{(forme } \frac{u'}{\sqrt{u}}\text{)}$$

$$=2\sqrt{\mathrm{e}^{\ln 5}+4}-2\sqrt{\mathrm{e}^{0}+4}$$

$$=6-2\sqrt{5}$$

$$\mathbf{K}=\int_{0}^{\ln 2}\frac{\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{5}}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{K}=\int_{0}^{\ln 2}\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{5}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{6}}{12}\right]_{0}^{\ln 2} \qquad \text{(forme } u'u^{n} \text{ en faisant la réécriture } \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{5}=\frac{1}{2}\times 2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{5}\text{)}$$

$$=\frac{\left(\mathrm{e}^{2\ln 2}-1\right)^{6}}{12}-\frac{\left(\mathrm{e}^{0}-1\right)^{6}}{12}$$

$$=\frac{3^{6}}{12}-0$$

$$=\frac{729}{12}$$

$$=\frac{243}{4}$$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

II.

$f : x \mapsto \left|\mathrm{e}^{x}-1\right|$

1°) $a \geqslant 0$ fixé

Démontrons que $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{-a}-2$.

On doit commencer par exprimer $f(x)$ sans barres de valeurs absolues.

Si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^{x}-1 \geqslant 0$ donc $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1$.

Si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^{x}-1 \leqslant 0$ donc $f(x)=-\mathrm{e}^{x}+1$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-a}^{0} \left(1-\mathrm{e}^{x}\right)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[x-\mathrm{e}^{x}\right]_{-a}^{0} + \left[\mathrm{e}^{x}-x\right]_{0}^{a}$$

$$= (0-1) - \left(-a-\mathrm{e}^{-a}\right) + \left(\mathrm{e}^{a}-a\right) - \left(\mathrm{e}^{0}-0\right)$$

$$= -1 + a + \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{a} - a - 1$$

$$= \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{a} - 2$$

2°)

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 4 cm

$\mathcal{A}$: aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [– 2 ; 2] en cm^2

Calculons $\mathcal{A}$.

D'après la question 1°), en appliquant le résultat pour $a = 2$ et en tenant compte de l'unité graphique 4 cm, on obtient :

$\mathcal{A} = 4 \times 4 \times \left(\mathrm{e}^{2} + \mathrm{e}^{-2} - 2\right)\ \mathrm{cm}^2$

Donc avec la calculatrice, on peut écrire : $\mathcal{A} \approx 88,39\ \ \mathrm{cm}^2$.

On se garde bien de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

III.

$\mathrm{F} : x \mapsto \int_{0}^{x} \ln\left(\mathrm{e}^{t}+1\right)\ \mathrm{d}t$

$\mathbf{F'(x) = \ln\left(e^{x}+1\right)}$ (théorème du cours)

IV.

$n \in \mathbb{N}^*$

1°) **Démontrons que $\forall x \in [n\,;n+1]\quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$.**

$\forall x \in [n\,;n+1] \quad n \leqslant x \leqslant n+1$

Tous les nombres qui interviennent dans cette inégalité sont strictement positifs donc en passant à l'inverse on obtient : $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$ soit : $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$.

2°) **Déduisons-en à l'aide d'une intégrale que l'on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.**

Les bornes n et $n+1$ sont dans le « bon sens » (car $n \leqslant n+1$) donc d'après la croissance de l'intégrale on a :

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{n+1}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{1}{n}\ \mathrm{d}x\,.$$

$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{n}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}$ (l'intégrale d'une fonction constante est égale à la constante que multiplie la différence des bornes)

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{n+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(n+1-n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln x\right]_{n}^{n+1}$$

$$= \ln(n+1) - \ln n$$

On en déduit que : $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.

V.

1°) $\mathrm{i}\sqrt{3}-1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2°) $z\in\mathbb{C}^*$ $\qquad \theta=\arg z \quad (2\pi)$

a) **Déterminons un argument du nombre $Z=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{z^2}$ en fonction de θ.**

$$\begin{aligned}\arg Z&=\arg\frac{i\sqrt{3}-1}{z^2}\\&=\arg\left(\mathrm{i}\sqrt{3}-1\right)-\arg z^2\\&=\arg\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)-2\arg z\\&=\frac{2\pi}{3}-2\arg z\\&=\frac{2\pi}{3}-2\theta\end{aligned}$$

b) **Déduisons-en pour quelles valeurs de θ le nombre Z est réel.**

On peut observer pour commencer que $Z\neq 0$.

$$\begin{aligned}Z\in\mathbb{R}&\Leftrightarrow \arg Z=0 \quad (\pi)\\&\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}-2\theta=k\pi \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)\\&\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}-\frac{k\pi}{2} \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{aligned}$$

Bonus :

Calculons $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-3}^{5}\left(\left|\,x+1\,\right|+\left|\,4-2x\,\right|\right)\mathrm{d}x$.

On commence par exprimer la quantité sous l'intégrale sans barres de valeur absolue.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert 4-2x\rvert$		$4-2x$		$4-2x$	0	$2x-4$	
$\lvert x+1\rvert+\lvert 4-2x\rvert$		$3-3x$		$5-x$		$3x-3$	

On applique la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_{-3}^{5}\left(\left|\,x+1\,\right|+\left|\,4-2x\,\right|\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{-1}\left(\left|\,x+1\,\right|+\left|\,4-2x\,\right|\right)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{2}\left(\left|\,x+1\,\right|+\left|\,4-2x\,\right|\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left(\left|\,x+1\,\right|+\left|\,4-2x\,\right|\right)\mathrm{d}x\\&=\left[3x-3\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{3x^2}{2}-3x\right]_{2}^{5}\\&=-3-\frac{3}{2}+9+\frac{27}{2}+10-2+5+\frac{1}{2}+\frac{75}{2}-15-6+6\\&=54\end{aligned}$$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.