TS

Exercices sur généralités sur lois de probabilités à densité

1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par $f(x)=2x$.

1°) Tracer la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm ou 4 « gros » carreaux.
2°) Démontrer que f est une fonction de densité sur I.
3°) On note P la probabilité sur l'intervalle I admettant f pour densité de probabilité.
On pose $\mathrm{J}=\left[\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right]$. Calculer $P(\mathrm{J})$.
4°) Soit X une variable aléatoire admettant P pour loi de probabilité.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;\pi]$ par $f(x)=k\sin x$ où k est un réel.
1°) Calculer k pour que f soit une fonction de densité sur I.
2°) On note P la probabilité sur l'intervalle I admettant f pour densité de probabilité.
On pose $\mathrm{J}=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\pi$.
Calculer $P(\mathrm{J})$ en fonction de a et b.

3 La production quotidienne X d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;10]$ avec la densité de probabilité f définie par $f(x)=0{,}006\left(10x-x^2\right)$.
1°) Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur I.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « la production quotidienne est inférieure ou égale à 7 tonnes » ;
B : « la production quotidienne dépasse 6 tonnes ».
3°) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;\pi]$ par $f(x)=k\sin^2 x$ où k est un réel.
Calculer k pour que f soit la fonction de densité sur l'intervalle I.
Pour cette valeur de k, tracer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

5 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-1\,;1]$ par $f(x)=1-|x|$.
1°) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra 5 cm ou 5 « gros » carreaux pour unité graphique.
2°) Démontrer que f est une fonction de densité sur I.

6 Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-a\,;a]$ par $f(x)=a^2-x^2$.
1°) Comment faut-il choisir a pour que f soit une densité de probabilité sur I ?
2°) Soit X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition F de X.
3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

7 1°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1\,;\mathrm{e}]$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
1°) Démontrer que f est une fonction de densité sur I.
Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'intervalle I admettant la fonction f pour densité de probabilité.
2°) Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

8 Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $\mathrm{F}(x)=1-\cos x$.

1°) Calculer $\mathrm{F}(0)$ et $\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2°) Quel est le sens de variation de F sur I ?
3°) Déterminer la fonction f qui est la densité de probabilité de la variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.
4°) Calculer l'espérance et la variance de X.

Corrigé

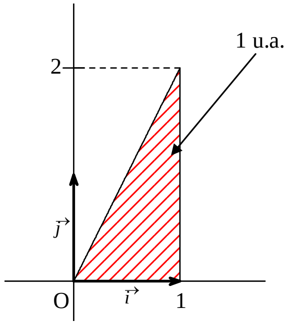
$\boxed{1}$

$f(x) = 2x$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$

1°) **Traçons la représentation graphique de *f*.**

f est la restriction d'une fonction linéaire à l'intervalle I.

Sa représentation graphique est un segment.



2°) **Démontrons que *f* est la fonction de densité d'une probabilité *P*.**

• Condition C_1 :

f est définie et continue sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$ (comme restriction d'une fonction linéaire à l'intervalle I).

• Condition C_2 :

f est positive ou nulle sur I.

• Condition C_3 :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Donc les trois conditions C_1, C_2, C_3 sont vérifiées, d'où *f* est une fonction de densité d'une probabilité *P*.

3°) **Calculons *P*(J).**

$$\mathrm{J} = \left[\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right]$$

$$P(\mathrm{J}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

4°) X : variable aléatoire continue admettant f pour densité de probabilité

Calculons E(X), V(X) et σ(X).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \int_0^1 x \times f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(on applique la formule de définition)}\\
&= \int_0^1 x \times 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \int_0^1 \left(x - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 \times f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(on applique la formule de définition)}\\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \times 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) \times 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{8x^3}{9} + \frac{4x^2}{9}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la formule de Kœnig-Huygens (c'est même la méthode la plus simple donc à privilégier).

$$V(X)=\int_0^1 x^2\times f(x)\,dx-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^1 x^2\times 2x\,dx-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^1 2x^3\,dx-[E(X)]^2$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}$$

$$=\frac{1}{18}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (ou $\frac{\sqrt{2}}{6}$: pas forcément mieux)

$\boxed{2}$

$f(x)=k\sin x\ \ (x\in[0\,;\pi])$

1°) **Déterminons *k* tel que *f* soit une densité de probabilité sur [0 ; π].**

Pour que *f* soit une densité de probabilité sur $[0\,;\pi]$, *f* doit vérifier les 3 conditions suivantes :

• Condition C_1 :

f doit être continue sur $[0\,;\pi]$ ce qui est bien le cas (restriction d'une fonction continue à l'intervalle $[0\,;\pi]$).

• Condition C_2 :

On sait que $\forall x\in[0\,;\pi]$ $\sin x\geqslant 0$ donc le signe de *f* sur $[0\,;\pi]$ est donné par celui de *k*.

f doit être positive ou nulle sur $[0\,;\pi]$ donc $k\geqslant 0$.

• Condition C_3 :

On doit avoir $\int_0^\pi f(x)\,dx=1$ (1).

$$(1)\Leftrightarrow\int_0^\pi k\sin x\,dx=1$$

$$\Leftrightarrow k\int_0^\pi \sin x\,dx=1$$

$$\Leftrightarrow k[-\cos x]_0^\pi=1$$

$$\Leftrightarrow k(-\cos\pi+\cos 0)=1$$

$$\Leftrightarrow 2k=1$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

Conclusion : $k=\frac{1}{2}$

Donc *f* est définie par $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$.

Il est possible de tracer la représentation graphique de *f* sur l'écran de la calculatrice graphique.

2°) $J=[a\,;b]$ $\left((a\,;b)\in\mathbb{R}^2\right.$ tel que $\left.0\leqslant a\leqslant b\leqslant\pi\right)$

Calculons $P(J)$.

$$P(J)=\int_a^b \frac{1}{2}\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b \sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos x]_a^b$$

$$=\frac{1}{2}\cos a-\frac{1}{2}\cos b$$

$$=\frac{\cos a-\cos b}{2}$$

$\boxed{3}$

$f(x)=0{,}006\left(10x-x^2\right)$ définie sur $[0\,;10]$

1°) **Vérifions que *f* est bien une densité de probabilité sur [0 ; 10].**

• Condition C_1 :

f est continue et définie sur [0 ; 10] comme restriction d'une fonction polynôme à l'intervalle [0 ; 10].

• Condition C_2 :

$\forall x\in[0\,;10]$ $\quad f(x)=0{,}006x(10-x)$

$\forall x \in [0\,;10] \quad x \geqslant 0$ et $10 - x \geqslant 0$

Donc $\forall x \in [0\,;10] \quad x(10-x) \geqslant 0$ d'où $\forall x \in [0\,;10] \quad f(x) \geqslant 0$.

On aurait éventuellement pu faire un tableau de signes.

• Condition C_3 :

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{10} 0{,}006\left(10x - x^2\right)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\int_0^{10} \left(10x - x^2\right)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} \\
&= 0{,}006\left(500 - \frac{1000}{3}\right) \\
&= 0{,}006 \times \frac{500}{3} \\
&= 0{,}002 \times 500 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Les conditions C_1, C_2, C_3 sont vérifiées.

On en déduit que *f* est une densité de probabilité sur [0 ; 10].

On peut visualiser cette densité de probabilité sur l'écran de la calculatrice.

2°) X : variable aléatoire continue admettant *f* pour densité de probabilité

• Calculons la probabilité de l'événement A : « La production quotidienne est inférieure ou égale à 7 tonnes ».

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{X} \leqslant 7) \\
&= \int_0^{7} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\int_0^{7} \left(10x - x^2\right)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{7} \\
&= 0{,}006 \times 49 \times \frac{8}{3} \\
&= 0{,}784
\end{aligned}$$

La probabilité que la production quotidienne soit inférieure ou égale à 7 tonnes est égale à 0,784.

• Calculons la probabilité de l'événement B : « la production quotidienne dépasse 6 tonnes ».

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{B}) &= P(\mathrm{X} > 6) \\
&= P(\mathrm{X} \geqslant 6) \qquad \text{(on peut aussi écrire : } P(\mathrm{B}) = P(6 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10)\text{)} \\
&= \int_6^{10} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\int_6^{10} \left(10x - x^2\right)\ \mathrm{d}x \\
&= 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_6^{10} \\
&= 0{,}006 \times \left(500 - \frac{1000}{3} - 180 + 72\right) \\
&= 0{,}006 \times \frac{176}{3} \\
&= 0{,}352
\end{aligned}$$

La probabilité que la production quotidienne dépasse 6 tonnes est égale à 0,352.

On aurait aussi pu écrire $P(\mathrm{X} \geqslant 6) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 6)$ mais cela rallonge beaucoup de manière tout à fait inutile.

On peut vérifier tous les résultats grâce à la calculatrice. Il est conseillé de rentrer une fois pour toutes la fonction $\mathrm{Y1} = ...$ pour éviter d'avoir à retaper à chaque fois l'expression.

Par exemple, sur la calculatrice, on tape $\int_6^{10} \mathrm{Y1}(\mathrm{X})\ \mathrm{dX}$.

3°)

• Calculons l'espérance de X.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_0^{10} x\times f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=0,006\int_0^{10} x\left(10x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$$
$$=0,006\int_0^{10}\left(10x^2-x^3\right)\,\mathrm{d}x$$

(les parenthèses à l'intérieur de l'intégrale sont obligatoires)

$$=0,006\left[\frac{10x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$$
$$=0,006\left[\frac{10x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}$$
$$=0,006\times\left(\frac{10\times10^3}{3}-\frac{10^4}{4}\right)$$
$$=0,006\times\left(\frac{10^4}{3}-\frac{10^4}{4}\right)$$
$$=0,006\times\left(\frac{10000}{3}-2500\right)$$
$$=5$$

On vérifie ce résultat à la calculatrice.

L'espérance de X est égale à 5 (unité : tonne).

• Calculons la variance de X.

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_0^{10} x^2\times f(x)\,\mathrm{d}x-\left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$$
$$=0,006\int_0^{10} x^2\times\left(10x-x^2\right)\,\mathrm{d}x-5^2$$
$$=0,006\int_0^{10}\left(10x^3-x^4\right)\,\mathrm{d}x-25$$
$$=0,006\left[\frac{10x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{10}-25$$

(plutôt que $\frac{10x^4}{4}$, on peut écrire $\frac{5x^4}{2}$)

$$=0,006\times\left(\frac{10^5}{4}-\frac{10^5}{5}\right)-25$$
$$=0,006\times(25000-20000)-25$$
$$=30-25$$
$$=5$$

La variance de X est égale à 5 (unité : tonne au carré).

• Calculons l'écart-type de X.

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{5}$$

L'écart-type de X est égal à $\sqrt{5}$ (unité : tonne).

$\boxed{\mathbf{4}}$

$f(x)=k\sin^2 x$ sur $[0\,;\pi]$ où $k\in\mathbb{R}$

Calculons *k* pour que *f* soit la fonction de densité d'une probabilité *P* sur l'intervalle [0 ; π].

• Condition C_1 :

f est continue sur I car la fonction $x\mapsto\sin^2 x$ est continue sur cet intervalle.

• Condition C_2 :

$\forall x\in[0\,;\pi]\;\sin^2 x\geqslant 0$ donc f est positive ou nulle sur I si et seulement si $k\geqslant 0$.

• Condition C_3 :

Déterminons k tel que $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=1\quad(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow\int_0^{\pi} k\sin^2 x\,\mathrm{d}x=1$$
$$\Leftrightarrow k\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=1\qquad\text{(linéarisation)}$$
$$\Leftrightarrow\frac{k}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{k}{2}\times(\pi-0)=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{k}{2}\times\pi=1$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{2}{\pi}$$

Pour calculer $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la calculatrice, on est obligé de taper $\int_0^{\pi}(\sin\mathrm{X})^2\,\mathrm{dX}$.

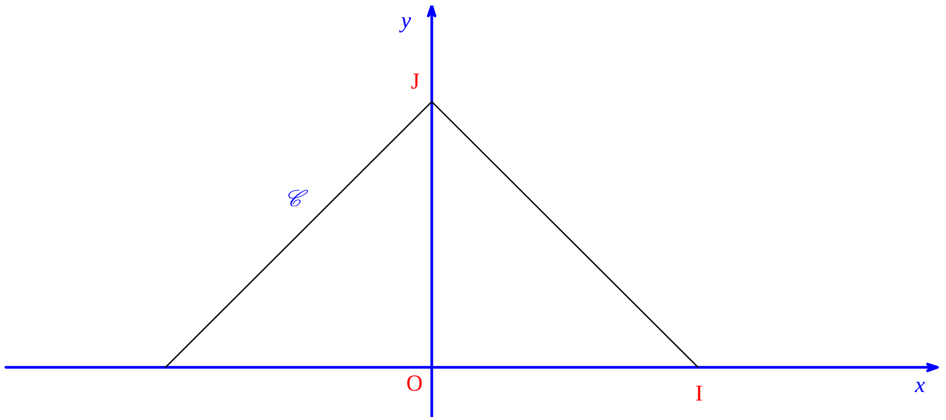
$\boxed{5}$

$f(x) = 1 - |x| \quad (x \in [-1\,;1])$

1°) **Traçons la représentation graphique $\mathscr{C}$ de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{i}\right)$.**

$\forall x \in [-1\,;0] \quad f(x) = 1 + x$

$\forall x \in [0\,;1] \quad f(x) = 1 - x$



La fonction *f* est une fonction affine par intervalles.

Sa représentation graphique est la réunion de deux segments.

On peut vérifier la représentation graphique sur l'écran de la calculatrice.

2°) **Démontrons que *f* est une densité de probabilité sur [– 1 ; 1].**

• Condition C_1 :

f est continue sur I car c'est la composée de la fonction $x \mapsto |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction $x \mapsto |1 - x|$ continue sur $\mathbb{R}$.

• Condition C_2 :

f est positive ou nulle sur I.

On peut répondre graphiquement à cette question.

On peut également faire une démonstration algébrique :

$\forall x \in [-1\,;1] \quad |x| \leqslant 1$ donc $\forall x \in [-1\,;1] \quad 1 - |x| \geqslant 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \geqslant 0$.

• Condition C_3 :

1ère méthode : calcul d'intégrale

$\forall x \in [-1\,;0] \quad f(x) = 1 + x$

$\forall x \in [0\,;1] \quad f(x) = 1 - x$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ (relation de Chasles pour les intégrales)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{0} (1+x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vérification possible à l'aide de la calculatrice.

2e méthode : raisonnement géométrique par les aires

On peut aussi utiliser un raisonnement géométrique en utilisant les aires.
En effet, l'intégrale de la fonction *f* sur l'intervalle [– 1 ; 1] correspond à l'aire du domaine sous la courbe de la fonction *f* sur cet intervalle.
Or la courbe représentative de *f* sur l'intervalle [– 1 ; 1] est la réunion de deux segments.
Le domaine sous la courbe représentative de *f* sur cet intervalle est un triangle.
Un simple calcul ou une simple observation géométrique permet de voir que l'aire de ce triangle est égale à une unité d'aire.

Voici comment on rédige alors :

L'aire sous la « courbe » de la fonction *f* est égale à : $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ u. a. (formule de l'aire d'un triangle).

On en déduit que *f* est une densité de probabilité sur [– 1 ; 1].

$\boxed{6}$

$a > 0$

$f(x) = a^2 - x^2 \ \ (x \in [-a\,;a])$

1°) **Déterminons *a* pour que *f* soit une densité de probabilité.**

• Condition C_1 :

$\forall x \in [-a\,;a] \quad f(x) \geqslant 0$

• Condition C_2 :

f est continue sur l'intervalle $[-a\,;a]$.

• Condition C_3 :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[a^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{a} \\ &= a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{4a^3}{3}\end{aligned}$$

On doit avoir $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ d'où $\dfrac{4a^3}{3} = 1$.

On en déduit que $a = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

2°) X : variable aléatoire de densité *f*

Déterminons la fonction de répartition F de X.

$\forall x \in]-\infty\,;-a[\quad \mathrm{F}(x) = 0$

$\forall x \in]a\,;+\infty[\quad \mathrm{F}(x) = 1$

$$\begin{aligned}\forall x \in [-a\,;a] \quad \mathrm{F}(x) &= P(\mathrm{X} \leqslant x) \\ &= \int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{x} \left(a^2 - t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[a^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{x} \\ &= a^2 x - \frac{x^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \\ &= a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2a^3}{3}\end{aligned}$$

On peut remplacer *a* par $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

3°)

• Calculons l'espérance de X.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \int_{-a}^{a} x \times f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} x\left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} \left(a^2 x - x^3\right)\mathrm{d}x \qquad \text{(les parenthèses à l'intérieur de l'intégrale sont obligatoires)} \\ &= \left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} \\ &= 0\end{aligned}$$

On peut tout de suite dire que l'intervalle $[-a\,;a]$ est centré en 0 et que la fonction *f* est paire donc que l'espérance de X est nulle.

On dit dans ce cas que la variable X est centrée.

● Calculons la variance de X.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \int_{-a}^{a} x^2 \times f(x)\,\mathrm{d}x - [\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2 \\
&= \int_{-a}^{a} x^2\left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x - 0^2 \\
&= \int_{-a}^{a} \left(a^2x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x - 0^2 \\
&= \left[a^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5} \\
&= \frac{4a^5}{15} \\
&= \frac{4a^3}{15} \times a^2 \\
&= \frac{4 \times \frac{3}{4}}{15} \times a^2 \\
&= \frac{a^2}{5} \\
&= \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2
\end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, on peut aussi écrire $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$\boxed{7}$

X : variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans $\mathrm{I} = [1\,;\,\mathrm{e}]$ et qui admet la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour densité de probabilité

1°) **Déterminons la fonction de répartition F de X.**

Rappels :

① Définition

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = P(\mathrm{X} \leqslant x)$.

② Expression

X est une variable aléatoire qui admet pour densité une fonction f définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ ($a < b$).

La fonction de répartition F de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in]-\infty\,;\,a[\quad \mathrm{F}(x) = 0$

$\forall x \in [a\,;\,b] \quad \mathrm{F}(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

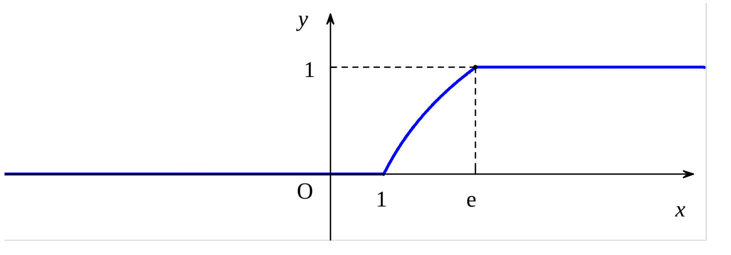
$\forall x \in]b\,;\,+\infty[\quad \mathrm{F}(x) = 1$

$\forall x \in]-\infty\,;\,1[\quad \mathrm{F}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [1\,;\,\mathrm{e}] \quad \mathrm{F}(x) &= \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= [\ \ln t\ ]_1^x \\
&= \ln x
\end{aligned}$$

$\forall x \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[\quad \mathrm{F}(x) = 1$

On trace la représentation graphique de la restriction de la fonction ln à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.



2°)

● Calculons E(X).

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{1}^{\mathrm{e}} x \times f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

• Calculons V(X).

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\left(\int_1^{\mathrm{e}} x^2\times f(x)\,\mathrm{d}x\right)-\left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}} x^2\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-(\mathrm{e}-1)^2$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x-(\mathrm{e}-1)^2$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}}-(\mathrm{e}-1)^2$$
$$=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}-(\mathrm{e}-1)^2$$
$$=\frac{(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}+1)}{2}-(\mathrm{e}-1)^2$$
$$=\frac{(\mathrm{e}-1)\left[(\mathrm{e}+1)-2(\mathrm{e}-1)\right]}{2}$$
$$=\frac{(\mathrm{e}-1)(-\mathrm{e}+3)}{2}$$
$$=\frac{(\mathrm{e}-1)(3-\mathrm{e})}{2}$$

On constate que le résultat est bien positif ou nul ce qui est rassurant : le résultat d'une variance est toujours positif ou nul.

$\boxed{8}$

$$\mathrm{F}(x)=1-\cos x\quad\left(x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

1°) **Déterminons la fonction *f* qui est la densité de probabilité de la variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.**

On utilise une propriété du cours.
On sait que la fonction de répartition a pour dérivée la fonction de densité.

$$\forall x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\quad f(x)=\mathrm{F}'(x)$$
$$=\sin x$$

2°)

• Calculons E(X).

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

On effectue une intégration par parties.

On pose $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$.
On a alors $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\left[\,-x\cos x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$=0-0+\left[\,\sin x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1-0$$
$$=1$$

• Calculons V(X).

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x-\left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$$

Pour calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$, on effectue une double intégration par parties.

On effectue une double IPP parce qu'avec une seule IPP on retombe sur une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

On pose $u_1'(x)=\sin x$ et $v_1(x)=x^2$
$u_1(x)=-\cos x$ et $v_1'(x)=2x$

$$\mathrm{I}=\left[-x^2\times\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$

On calcule ensuite $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

On pose : $u_2'(x)=\cos x$ et $v_2(x)=x$.
On a alors $u_2(x)=\sin x$ et $v_2'(x)=1$.

$$
\begin{aligned}
J &= \left[x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} + \left[\ \cos x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}
$$

On reprend alors le calcul de I :

$$
\begin{aligned}
I &= 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= \pi - 2
\end{aligned}
$$

On achève enfin le calcul de $V(X)$.

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \pi - 2 - 1 \\
&= \pi - 3
\end{aligned}
$$