1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 18 mars 2013 (30 min)

Prénom : ……………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (6 points)

Deux tireurs à l'arc A et B ont chacun réalisé 26 tirs sur cette cible.
Un tir rapporte le nombre de points indiqués sur la zone et zéro point lorsque la cible est manquée.
Ils ont obtenu les résultats suivants :

Nombre de points	0	10	30	50	100
Tireur A	1	6	3	11	5
Tireur B	2	8	3	5	8

Calculer la médiane et les quartiles pour chacun des deux tireurs.

• Pour le nombre de points du tireur A,

la médiane est égale à ……. , le premier quartile est égal à ……., le troisième quartile est égal à ……. .

• Pour le nombre de points du tireur B,

la médiane est égale à ……. , le premier quartile est égal à ……., le troisième quartile est égale à ……. .

II. (2 points)

La moyenne d'une série statistique discrète est égale à 5 et la moyenne des carrés des valeurs est égale à 120.

Calculer l'écart-type σ de la série (valeur exacte).

σ = ……………………..

III. (6 points)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}55$.

1°) À l'aide de la calculatrice, calculer $P\,(X = 100)$, $P\,(X \leqslant 100)$, $P\,(X \geqslant 80)$ et $P\,(97 < X \leqslant 102)$.

On tronquera les résultats après la quatrième décimale.

$P\,(X = 100) \approx$ ………….. ; $P\,(X \leqslant 100) \approx$ …………..

$P\,(X \geqslant 80) \approx$ ………….. ; $P\,(97 < X \leqslant 102) \approx$ …………..

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

E (X) = …………………. V(X) = ………………….

IV. (2 points)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}4$.

Calculer n sachant que l'espérance de X est égale à 20.

n = ………

V. (4 points) Ensembles de points et algorithmes

Le plan P est muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

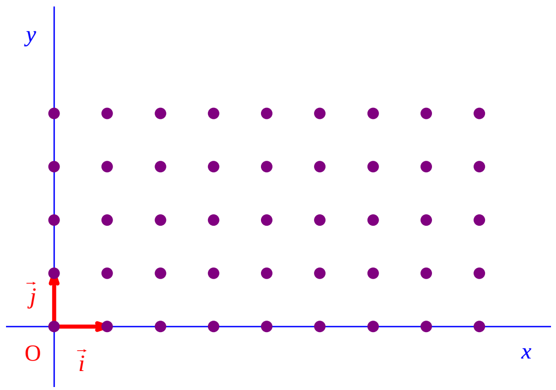
Soit n et p deux entiers naturels fixés.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à l'ensemble $\text{E}_{n,\,p}$ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient simultanément les quatre conditions suivantes :

- $x \in \mathbb{N}$;
- $y \in \mathbb{N}$;
- $0 \leqslant x \leqslant n$;
- $0 \leqslant y \leqslant p$.

On peut écrire $\text{E}_{n,\,p} = \{\text{M}(x\,;\,y) \in P \,/\, x \in \mathbb{N}\,;\, y \in \mathbb{N}\,;\, 0 \leqslant x \leqslant n\,;\, 0 \leqslant y \leqslant p\}$.

On a représenté ci-dessous à titre d'exemple l'ensemble $\text{E}_{8,\,4}$:



1°) **Algorithme de construction**

Compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de représenter l'ensemble $\text{E}_{n,\,p}$ pour des valeurs de n et p données par l'utilisateur.

Entrées :
Saisir n et p

Traitement et sorties :
Pour i allant de ……. à ……. **Faire**
  Pour j allant de ……. à ……. **Faire**
    Placer le point de coordonnées (…… ; …...)
  FinPour
FinPour

On pourra réaliser le programme sur calculatrice s'il reste du temps.

2°) Exprimer le cardinal de $\text{E}_{n,\,p}$ (c'est-à-dire le nombre d'éléments*) en fonction de n et p.

card $\text{E}_{n,\,p}$ = ………………….……

* On rappelle que les éléments de $\text{E}_{n,\,p}$ sont des points donc le cardinal de $\text{E}_{n,\,p}$ est égal au nombre de points de $\text{E}_{n,\,p}$.

Corrigé du contrôle du 18-3-2013

I.

Nombre de points	0	10	30	50	100
Tireur A	1	6	3	11	5
Tireur B	2	8	3	5	8

• Pour le nombre de points du tireur A,

la médiane est égale à **50**, le premier quartile est égal à **10**, le troisième quartile est égal à **50**.

• Pour le nombre de points du tireur B,

la médiane est égale à **40**, le premier quartile est égal à **10**, le troisième quartile est égale à **100**.

Explications :

Pour chacune des deux séries, l'effectif total, 26, est pair donc $\text{Med} = \dfrac{13^{\text{e}} \text{ valeur} + 14^{\text{e}} \text{ valeur}}{2}$.

$\dfrac{26}{4} = 6,5$ donc le premier quartile de chacune des deux séries est égal à la 7^{e} valeur.

$\dfrac{3 \times 26}{4} = 19,5$ donc le troisième quartile de chacune des deux séries est égal à la 20^{e} valeur.

On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de chacune des deux séries.

Nombre de points	0	10	30	50	100
Tireur A	1	6	3	11	5
Effectif cumulé croissant	1	7	10	21	26

Nombre de points	0	10	30	50	100
Tireur B	2	8	3	5	8
Effectif cumulé croissant	2	10	13	18	26

On vérifie les résultats grâce aux commandes statistiques de la calculatrice.

II.

$\sigma = \sqrt{95}$ (valeur exacte)

Explication :

Notons $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ les valeurs de la série (n est donc l'effectif total).

D'après la formule de Kœnig-Huygens, la variance de la série statistique est donnée par la formule :

$$\text{V} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2$$ où $\overline{x}$ désigne la moyenne des valeurs.

V = moyenne des carrés – carré de la moyenne

Donc :

$V = 120 - 5^2$

$= 95$

Or l'écart-type s d'une série statistique est la racine carrée de la variance donc $\sigma = \sqrt{95}$ (valeur exacte).

On n'écrit pas donc $\sigma = 9,74679434...$.
En effet, cette égalité ne donne pas la valeur exacte de σ mais seulement le début de l'écriture décimale illimitée de σ.

III.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,55$.

1°) **Calculs de probabilités**

$P\,(X = 100) \approx$ **0,0206** (affichage de la calculatrice : 0,0206253657)

$P\,(X \leqslant 100) \approx$ **0,0887** (affichage de la calculatrice : 0,0887006162)

$P\,(X \geqslant 80) \approx$ **0,9999** (affichage de la calculatrice : 0,9999923797)

$P\,(97 < X \leqslant 102) \approx$ **0,1051** (affichage de la calculatrice : 0,105169509)

Quelques explications détaillées pour les deux dernières probabilités :

On utilise à chaque fois la fonction de répartition de la loi binomiale.

$P\,(X \geqslant 80) = 1 - P\,(X < 80)$

$= 1 - P\,(X \leqslant 79)$

$P\,(97 < X \leqslant 102) = P\,(X \leqslant 102) - P\,(X \leqslant 97)$

2°) **Calculs de l'espérance mathématique et de la variance de X.**

On utilise les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

E (X) = **110**

V(X) = **49,5**

IV.

X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

Calculons *n* sachant que E(X) = 20.

***n* = 50**

Explication :

$E(X) = 20 \Leftrightarrow np = 20$ (formule de l'espérance de la loi binomiale)

$\Leftrightarrow n \times 0,4 = 20$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{20}{0,4}$

$\Leftrightarrow n = 50$

V. Ensembles de points et algorithmes

$(n\,;p) \in \mathbb{N}^2$ fixé

$E_{n,\,p} = \{M(x\,;y) \in P \,/\, x \in \mathbb{N}\,;\, y \in \mathbb{N}\,;\, 0 \leqslant x \leqslant n\,;\, 0 \leqslant y \leqslant p\}$

$E_{n,\,p}$ est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de P.

1°) **Algorithme de construction**

L'algorithme comporte deux boucles « Pour » imbriquées l'une dans l'autre.

Entrées :
Saisir n et p

Traitement et sorties :
Pour i allant de **0** à ***n*** **Faire**
    Pour j allant de **0** à ***p*** **Faire**
        Placer le point de coordonnées (i ; j)
    FinPour
FinPour

On a une double boucle « Pour » (l'une est comprise dans l'autre).

On peut réaliser très aisément le programme sur calculatrice.

2°) **Exprimons le cardinal de $\mathrm{E}_{n,p}$ en fonction de n et p.**

Il s'agit d'une question de dénombrement. On cherche combien il y a de points dans l'ensemble $\mathrm{E}_{n,p}$.

$$\boxed{\text{card } \mathrm{E}_{n,p} = (n+1)(p+1)}$$

On peut vérifier cette formule pour l'ensemble $\mathrm{E}_{8,4}$ qui est donné dans l'énoncé.

On compte 45 points sur la figure, ce qui est bien égal à $(8+1)\times(4+1)$.