1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le lundi 18 mars 2013

I. L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques relations métriques dans un triangle rectangle – en dehors du théorème de Pythagore – en utilisant le produit scalaire.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

1°) Démontrer, en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}} \bullet \overrightarrow{\text{BC}}$, que l'on a : $\text{BA}^2 = \text{BH} \times \text{BC}$ (1).
Démontrer également que l'on a : $\text{CA}^2 = \text{CH} \times \text{CB}$ (2).

2°) Démontrer que l'on a : $\text{AH}^2 = \text{HB} \times \text{HC}$ (3) en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}}$.

3°) Démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{\text{AH}^2} = \dfrac{1}{\text{AB}^2} + \dfrac{1}{\text{AC}^2}$ (4).

Indications : transformer le membre de droite en utilisant les relations (1) et (2) ; utiliser ensuite (3).

N.B. :

● Toutes les relations de cet exercice méritent d'être retenues par cœur ; il est fortement conseillé de faire une fiche.

● On peut également démontrer ces relations par d'autres méthodes :

- (1) et (2) avec les cosinus ;

- (1), (2), (3) avec les triangles semblables.

II. On considère un QCM comprenant 20 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est exacte.
Un candidat répond au hasard à toutes les questions du QCM.
On note X le nombre de réponses exactes données par le candidat.

1°) Justifier brièvement que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$.

2°) Le barème de notation est le suivant :
- chaque réponse juste rapporte 1 point ;
- chaque réponse fausse enlève 0,5 point.

On note T le total des points obtenus par le candidat.

a) Exprimer T en fonction de X (résultat sous forme simplifiée).

b) Calculer la probabilité que le total des points soit positif ou nul (troncature au millième).

3°) La note finale N est ramenée à 0 si le total des points est strictement négatif.

a) On admet* que l'espérance mathématique de N est donnée par la formule :

$$\text{E}(\text{N}) = \sum_{k=7}^{k=20} (1{,}5k - 10) \times P(\text{X} = k).$$

Utiliser la calculatrice ou un tableur pour calculer E (N) (voir annexe pour une aide).

Donner l'affichage obtenu sur la calculatrice puis donner la troncature au millième.

b) On admet* que la variance de N est donnée par la formule :

$$\text{V}(\text{N}) = \sum_{k=7}^{k=20} (1{,}5k - 10)^2 \times P(\text{X} = k) - \left[\text{E}(\text{N})\right]^2.$$

Calculer la variance et l'écart-type de N (mêmes consignes).

* La démonstration – quoique assez aisée – n'est pas demandée.

Aide pour le calcul d'une somme à la calculatrice

Sur calculatrice, on peut :

- soit utiliser deux listes et effectuer des opérations sur les deux listes (somme de produits) ;

- soit utiliser la commande permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite expliquée dans l'encadré ci-dessous.

• Calculatrice TI :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\text{somme (suite((1.5}*\text{K} - 10) * \text{binompdf(20,0.25,K), K, 7, 20))}}$.

On obtient :

- *somme* (ou *sum* en anglais) par Listes ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$), choix MATH, puis *somme* ;
- *suite* (ou *seq* avec une parenthèse lorsque la calculatrice est en anglais) par Listes, OPS puis suite(.

Il est possible d'obtenir *somme* et *suite* en allant dans le catalogue (pour cela, taper $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{0}$) et on cherche dans la liste.

• Calculatrice CASIO GRAPH 35 + (en dehors du modèle ancien vert) :

On fait : Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.
On complète ensuite les différents carrés (comme pour l'utilisation normale du symbole Σ).

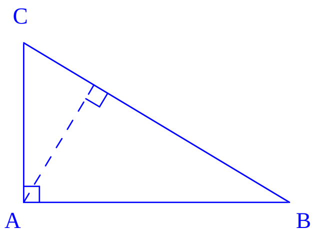
Corrigé du devoir pour le 18 mars 2013

I. Relations métriques dans un triangle rectangle

Hypothèses :

ABC : triangle rectangle en A
H : pied de la hauteur issue de A

Faire une figure.



1°) Démontrons que $BA^2 = BH \times BC$ (1).

D'une part, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC) *

$= BH \times BC$ car $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}$ car A est le projeté orthogonal de C sur la droite (BA)

$= \overrightarrow{BA}^2$

$= BA^2$

Conclusion : $BA^2 = BH \times BC$ (1)

* On peut aussi décomposer $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $CA^2 = CH \times CB$ (2).

D'une part, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$= CH \times CB$ car $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA)

$= \overrightarrow{CA}^2$

$= CA^2$

Conclusion : $CA^2 = CH \times CB$ (2)

2°) Démontrons que $AH^2 = HB \times HC$ (3).

D'une part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)\\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH}}_{0} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}\\ &= \overrightarrow{AH}^2 - HB \times HC \quad (\overrightarrow{HB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont colinéaires de sens contraires})\\ &= AH^2 - HB \times HC\end{aligned}$$

D'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

On a donc : $AH^2 - HB \times HC = 0$.

Par suite, on en déduit que $\boxed{AH^2 = HB \times HC}$ (3).

3°) Démontrons que $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).

On va partir du membre de droite de cette relation.

D'après les relations (1) et (2), on a : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{BH \times BC} + \dfrac{1}{CH \times CB}$.

$$= \frac{1}{BC}\left(\frac{1}{BH} + \frac{1}{CH}\right)$$

$$= \frac{1}{BC}\left(\frac{BH + CH}{BH \times CH}\right)$$

Or $H \in [BC]$ d'où $BH + CH = BC$.

De plus, d'après la relation (3), on a : $AH^2 = HB \times HC$.

D'où : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{\cancel{BC}} \times \dfrac{\cancel{BC}}{AH^2}$

Par suite, on a : $\boxed{\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{AH^2}}$.

Autre façon :

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{HB\times HC}$$

$$=\frac{1}{\frac{BA^2}{BC}\times\frac{CA^2}{BC}}$$

$$=\frac{BC^2}{BA^2\times CA^2}$$

$$=\frac{BA^2+CA^2}{BA^2\times CA^2}$$

$$=\frac{\cancel{BA^2}}{\cancel{BA^2}\times CA^2}+\frac{\cancel{CA^2}}{BA^2\times\cancel{CA^2}}$$

$$=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{BA^2}$$

II.

On considère un QCM comprenant 20 questions.

Pour chaque question, 4 réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est exacte.

Un candidat répond au hasard à toutes les questions du QCM.

X : nombre de réponses exactes données par le candidat

1°) **Justifions brièvement que X suit la loi binomiale de paramètres *n* = 20 et *p* = 0,25.**

L'épreuve « répondre à une question » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « donner la réponse correcte » $P(\text{S})=0{,}25$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « donner une réponse erronée » $P(\overline{\text{S}})=0{,}75$

On répète cette épreuve 20 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès à l'issue des 20 questions.

X suit la loi binomiale B(20 ; 0,25).

2°) Le barème de notation est le suivant :
- chaque réponse juste rapporte 1 point ;
- chaque réponse fausse enlève 0,5 point.

T : total des points obtenus par le candidat

a) **Exprimons T en fonction de X.**

T = X – 0,5 (20 – X)

= 1,5 X – 10

$$T=X-\frac{20-X}{2}$$

$$=\frac{3X-20}{2}$$

b) **Calculons la probabilité que le total de points soit positif ou nul.**

$T\geqslant 0 \Leftrightarrow 1{,}5\,X-10\geqslant 0$

$\Leftrightarrow X\geqslant\frac{20}{3}$ (car $\frac{20}{3}=6{,}666666666\ldots$)

$\Leftrightarrow X\geqslant 7$

Il faut au moins 7 réponses justes pour que $X\geqslant 0$.

$P(T\geqslant 0)=P(X\geqslant 7)$

$=1-P(X<7)$

$=1-P(X\leqslant 6)$

$=0{,}214218051\ldots$ (en utilisant la fonction de répartition de la loi binomiale sur la calculatrice)

***P* (T ⩾ 0) ≈ 0,214 (troncature au millième)**

On pourrait aussi écrire : $P(T\geqslant 0)=P(X\geqslant 7)=\sum_{k=7}^{k=20}P(X=k)$ mais cette écriture ne permet pas de calculer la somme facilement avec la calculatrice.

3°) La note finale N est ramenée à 0 si le total des points est strictement négatif.

a) **Calculons l'espérance de N.**

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{k=7}^{k=20}(1{,}5k-10)\times P(X=k)$$

On utilise la calculatrice ou un tableur.

E (N) = 0,34963…

E (N) ≈ 0,349 (troncature au millième)
Ce résultat fait réfléchir !

b)

• Calculons la variance de N.

$$\mathrm{V}(\mathrm{N}) = \sum_{k=7}^{k=20} (1{,}5k - 10)^2 \times P(\mathrm{X} = k) - \left[\mathrm{E}(\mathrm{N})\right]^2$$

V (N) = 0,921722839…

V (N) ≈ 0,921 (troncature au millième)

• Calculons l'écart-type de N.

$$\sigma(\mathrm{N}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{N})}$$

σ (N) = 0,9600639765…

Donc **σ (N) ≈ 0,960 (troncature au millième)**