1$^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du mardi 26 février 2013 (3 heures)

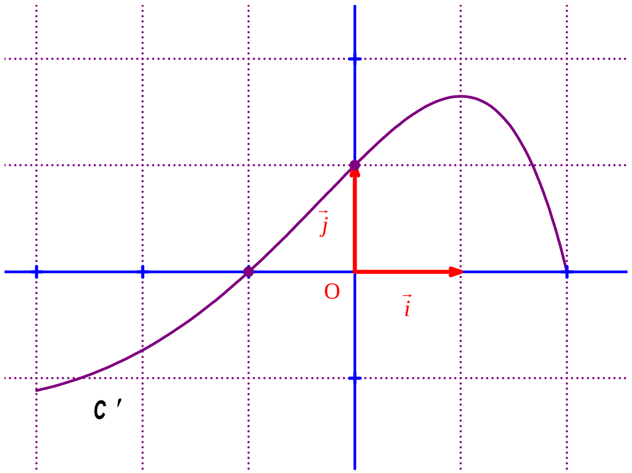
I. (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle [− 3 ; 2].

On dispose des informations suivantes :

• $f(0) = -1$;
• la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-dessous.

Les points marqués sur le graphique sont à coordonnées entières.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse brièvement (mais clairement !).

Pour chaque question, on attend une réponse concise et claire.
On veillera à la précision du vocabulaire employé.
Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte.

1. Pour tout réel x de l'intervalle [− 3, − 1], $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle [− 1 ; 2].

3. Pour tout réel x de l'intervalle [− 3 ; 2], $f(x) \geqslant -1$.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

II. (10 points)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

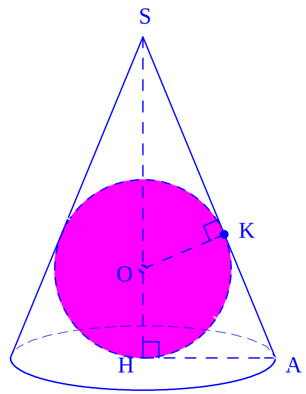
1°) Calculer $f'(x)$ (écrire trois lignes de calcul ; donner le résultat sous forme factorisée).

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de la dérivée de f (en détaillant bien) et les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (flèches à la règle).
Compléter le tableau avec les valeurs des extremums éventuels (calculs au brouillon).

Partie 2

Une unité de longueur est fixée dans toute cette partie.

On a représenté ci-dessous en perspective cavalière une sphère de centre O et de rayon 1 et un cône de révolution $\mathcal{C}$ de sommet S, circonscrit à la sphère.



Les points A, H, O, S et K sont coplanaires
Les droites (OK) et (SA) sont perpendiculaires, de même que les droites (AH) et (SH).

On note h la hauteur du cône ($h > 2$).

Le but de l'exercice est de déterminer pour quelle valeur de h le volume du cône est minimal.

On rappelle que le volume d'un cône de révolution est donné par la formule : $\mathcal{V} = \dfrac{\pi \times (\text{rayon})^2 \times \text{hauteur}}{3}$.

1°)

a) Démontrer que $\text{SK}^2 = h^2 - 2h$.

b) En exprimant de deux manières différentes la tangente de l'angle $\widehat{\text{HSA}}$, démontrer que $\dfrac{1}{\sqrt{h^2-2h}} = \dfrac{\text{HA}}{h}$.

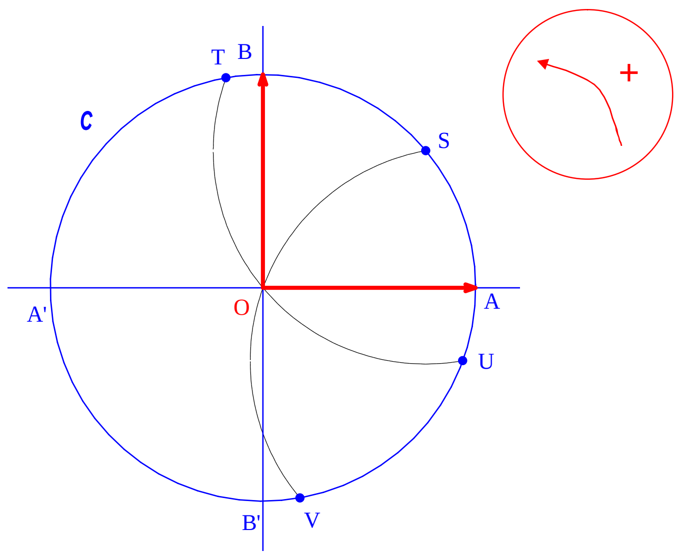
c) En déduire que $\text{HA}^2 = \dfrac{h}{h-2}$.

2°) Soit V(h) le volume du cône.
Exprimer V(h) en fonction de h.

3°) Conclure en utilisant la partie 1 (répondre brièvement).

III. (6 points)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).
Soit S un point quelconque de $\mathcal{C}$.
L'arc de cercle de centre S passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en T et U.
L'arc de cercle de centre U passant par O recoupe $\mathcal{C}$ en V.



1°)
a) Déterminer sans justifier la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OV}\,;\overrightarrow{OU}\right)$, $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OS}\right)$, $\left(\overrightarrow{OS}\,;\overrightarrow{OT}\right)$ (on pourra s'intéresser à la nature des triangles OSU, OST, OUV).

b) Démontrer que les points T et V sont diamétralement opposés en utilisant les angles orientés.

Dans les deux questions suivantes, on note α une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$.

On a donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)=\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2°)
a) Déterminer en fonction de α une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OV}\right)$.

b) En déduire pour quelles valeurs de α le point V est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.

3°)
a) Déterminer en fonction de α une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{SU}\right)$.

b) En déduire pour quelles valeurs de α les droites (AO) et (SU) sont perpendiculaires.

IV. (5 points)

On donne $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

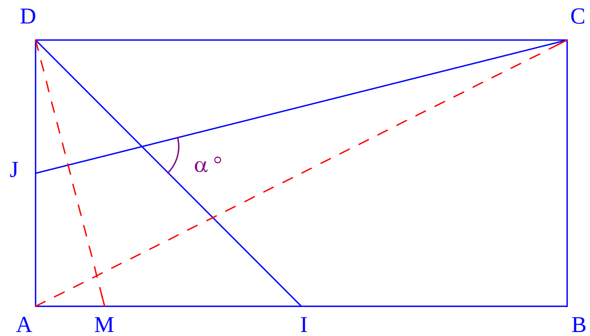
1°) Démontrer que l'on a : $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

2°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

V. (4 points)

Dans tout l'exercice, une unité de longueur est fixée dans le plan.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 2 et AD = 1.



Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit M un point quelconque du segment [AB] tel que AM = x avec $0\leqslant x\leqslant 2$.

a) Exprimer $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de x.
b) Pour quelle valeur de x les droites (DM) et (AC) sont-elles orthogonales ?

2°) Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].

On note α la mesure en degrés de l'angle aigu formé par les droites (DI) et (CJ).

a) Calculer $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JC}$.
b) Déterminer la valeur arrondie au centième de α.

VI. (6 points)

On propose aux élèves Quentin, Nicolas et Lucien de répondre à un Q.C.M. comportant 4 questions dont le barème et les instructions sont détaillées ci-après.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions A, B, C ou D est exacte. L'élève recopie sur la feuille une grille de réponses présentée comme ci-dessous :

Question	Réponse : A, B, C, D
1	
2	
3	
4	

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est 0.

Les trois candidats répondent correctement à la première question.

1°) Quentin choisit de ne pas répondre à la question N°2 et de donner une réponse à chacune des deux dernières questions, en choisissant au hasard et de façon équiprobable, l'une des 4 réponses proposées.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points dans cette situation.

Faire un arbre de probabilités au brouillon (on pourra se limiter aux réponses données aux deux dernières questions). On rappelle que le candidat a répondu correctement à la première question.

a) Déterminer les valeurs possibles x_1, x_2, x_3 de X, rangées dans l'ordre croissant, et la loi de probabilité de X dans un tableau.
Les probabilités seront données sous la forme de fractions ayant le même dénominateur.

b) Calculer l'espérance mathématique de X (résultat en valeur exacte sous forme décimale).

2°) Nicolas adopte la stratégie de donner une réponse à chacune des trois dernières questions en choisissant au hasard et de façon équiprobable l'une des 4 réponses proposées.
On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre total de points dans cette situation.

Faire un arbre de probabilités au brouillon (on pourra se limiter aux réponses données aux trois dernières questions). On rappelle que le candidat a répondu correctement à la première question.

a) Déterminer sans justifier les valeurs possibles y_1, y_2, y_3, y_4 de Y, rangées dans l'ordre croissant, et la loi de probabilité de Y dans un tableau.
Les probabilités seront données sous la forme de fractions ayant le même dénominateur.

b) Calculer l'espérance mathématique de Y (résultat en valeur exacte sous forme décimale).

3°) Lucien choisit de ne répondre à aucune des trois dernières questions.

Classer les stratégies de Quentin, Nicolas et Lucien.

VII. (5 points)

On souhaite comparer deux placements bancaires :

- placement A : dépôt initial de 500 € et un versement annuel de 10 €.

- placement B : dépôt initial de 400 € et un versement annuel dont la somme est égale à 5 % du capital précédent.

On note a_n le montant du capital, en euros, obtenu par le placement A et b_n le montant du capital, en euros, obtenu par le placement B après n années de versement ($n \in \mathbb{N}$). Ainsi, on a : $a_0 = 500$ et $b_0 = 400$.

1°) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.
En déduire la nature des suites (a_n) et (b_n).

2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien d'années le capital obtenu par le placement B devient supérieur au capital obtenu par le placement A.

Quelques consignes

- Garder l'énoncé à la fin du contrôle.

- Ne rien écrire sur l'énoncé.

- Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume sur les feuilles de réponses jointes à l'énoncé.

- Les questions suivies du sigle □ doivent être résolues au moyen d'un raisonnement par équivalence et rédigées sous la forme d'une « chaîne d'équivalence », en rédigeant à l'aide de « si et seulement si » (qu'on autorise d'abréger en « ssi »).

Feuille de réponses du contrôle du mardi 26 février 2013

Prénom et nom : ………………………………………………….. **Note : ….. / 20**

I (4)	II (10)	III (6)	IV (5)	V (4)	VI (6)	VII (5)
………	………	………	………	………	………	………

I.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f(x) \leqslant 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0). ☐ Vrai ☐ Faux

Justifications :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II.

Partie 1

1°)

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ $f'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

2°)

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de..........	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

f' s'annule en .... (donner les valeurs de x).

Partie 2

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III.

1°)

a) La mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OV};\overrightarrow{OU}\right)$, $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OS}\right)$, $\left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OT}\right)$ est égale à …….. .

b)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV.

V.

VI.

1°) a) X peut prendre les valeurs $x_1 = ...$, $x_2 = ...$, $x_3 = ...$.

x_i				
$P (X = x_i)$				Total = 1

b) E(X) = ………………

2°) a) Y peut prendre les valeurs $y_1 = ...$, $y_2 = ...$, $y_3 = ...$, $y_4 = ...$.

y_i					
$P (Y = y_i)$					Total = 1

b) E(Y) = ………………

3°)

……..

……..

……..

……..

……..

……..

VII.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 26-2-2013

I.

La courbe représentative $\mathcal{C}\,'$ et l'information $f(0)=-1$ nous permettent de dresser le tableau suivant :

x	-3		-1		0		2
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	0
Variations de f	↘		$f(-1)$	↗	-1	↗	

1. $\forall\, x \in [-3, -1]\quad f\,'(x) \leqslant 0$

VRAI

La courbe $\mathcal{C}\,'$ est située au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle [– 3 ; – 1]
donc $\forall\, x \in [-3, -1]\quad f\,'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction *f* est croissante sur l'intervalle [– 1 ; 2].

VRAI

$\forall\, x \in [-1\,;\,2]\quad f\,'(x) \geqslant 0$

On en déduit que *f* est croissante sur l'intervalle [– 1 ; 2].

3. Pour tout réel *x* de l'intervalle [– 3 ; 2], $f(x) \geqslant -1$.

FAUX

f est strictement croissante sur l'intervalle [– 1 ; 2].

$f(0)=-1$

On en déduit que $f(-1)<-1$.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction *f*.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

VRAI

Notions *T* la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

T a pour équation $y=f\,'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=f\,'(0)x+f(0)$.

Graphiquement on lit que $f\,'(0)=1$; de plus $f(0)=-1$ d'où *T* a pour équation $y=x-1$.

Notons A le point de coordonnées (1 ; 0).

On a $x_A-1=1-1=0=y_A$ donc le point A appartient bien à *T*.

II.

Partie 1

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2} \text{ définie sur } \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

1°) **Calculons $f\,'(x)$.**

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}\quad f\,'(x)=\frac{2x(x-2)-1\times x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

2°) **Dresser le tableau de variation de *f*.**

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
SGN de x		$-$	0^{num}	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-4$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $f\,'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	‖	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de f		↗	0	↘	‖	↘	8	↗	

Partie 2

1°) **Démontrons que $SK^2 = h^2 - 2h$.**

Dans le triangle SKO rectangle en O, on a d'après le théorème de Pythagore :

$OS^2 = OK^2 + SK^2 = 1 + SK^2$

$SK^2 = OS^2 - 1$

Or OS = SH – OH = h – 1 d'où $SK^2 = OS^2 - 1 = (h-1)^2 - 1 = h^2 - 2h + 1 - 1 = h^2 - 2h$

Démontrons que $\dfrac{1}{\sqrt{h^2-2h}} = \dfrac{HA}{h}$.

Dans le triangle SHA rectangle en H on a $\tan\widehat{HSA} = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{AH}{h}$

Dans le triangle SOK rectangle en K on a $\tan\widehat{OSK} = \tan\widehat{HSA}$.

Donc $\dfrac{OK}{SK} = \dfrac{1}{\sqrt{h^2-2h}}$.

Ainsi, on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{h^2-2h}} = \dfrac{HA}{h}$

c) **Déduisons-en que $HA^2 = \dfrac{h}{h-2}$.**

Pour $h > 2$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{h^2-2h}} = \dfrac{HA}{h}$ donc $HA = \dfrac{h}{\sqrt{h^2-2h}}$.

Par conséquent, $HA^2 = \dfrac{h^2}{h^2-2h}$

$= \dfrac{h \times h}{h(h-2)}$

$= \dfrac{h}{h-2}$

2°) **Exprimons V(h) en fonction de h.**

Pour $h > 2$: $V(h) = \dfrac{\pi \times AH^2 \times h}{3}$

$= \dfrac{\pi \times \dfrac{h}{h-2} \times h}{3}$

$= \dfrac{\pi h^2}{3(h-2)}$

$= \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{h^2}{h-2}$

3°) **Concluons en utilisant la Partie 1.**

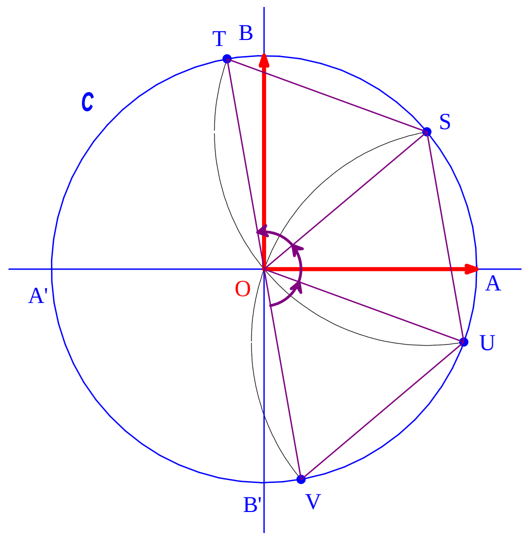
D'après la question précédente, $V(h) = \dfrac{\pi}{3} \times f(h)$.

Or $\dfrac{\pi}{3} > 0$ donc les variations de V sont les mêmes que celles de f.

D'après l'étude de la fonction f dans la partie 1, on en déduit que sur $]2\,;+\infty[$, V admet un minimum qui vaut 8 atteint pour h = 4.

Le volume du cône est donc minimal pour h = 4 (et $V(4) = \dfrac{8\pi}{3}$).

III.



Pour plus de rigueur, l'énoncé aurait dû préciser la position des points T et U pour la construction avec l'arc de cercle de centre S (en utilisant par exemple des demi-plans).
J'aurais dû également préciser que les arcs de cercle étaient « intérieurs » au cercle $\mathcal{C}$.

1°)

a) **Déterminons une mesure des angles orientés $(\overrightarrow{OV}\,;\overrightarrow{OU})$, $(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OS})$, $(\overrightarrow{OS}\,;\overrightarrow{OT})$.**

On démontre aisément que OUV, OUS, OST sont équilatéraux (par exemple, pour le triangle OUV :
$OU = OV = 1$ et de plus l'arc de cercle de centre U passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en V d'où $OU = UV$; ainsi OUV est équilatéral).

De plus, on peut observer qu'ils sont directs.

Donc une mesure en radians des angles orientés $(\overrightarrow{OV}\,;\overrightarrow{OU})$, $(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OS})$, $(\overrightarrow{OS}\,;\overrightarrow{OT})$ est $\dfrac{\pi}{3}$.

• Il est étonnant de voir qu'un nombre non négligeable d'élèves s'est trompé dans la mesure à donner alors que cette question était particulièrement simple).

• J'ai trouvé des erreurs de signe, liés à un problème d'orientation. La même erreur s'est d'ailleurs retrouvée dans les questions suivantes.

• J'ai aussi trouvé des élèves qui ont indiqué $\frac{2\pi}{3}$ comme mesure en radians des trois angles.

b) **Démontrons que les points T et V sont diamétralement opposés.**

D'après la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$\left(\overrightarrow{OV};\overrightarrow{OT}\right)=\left(\overrightarrow{OV};\overrightarrow{OU}\right)+\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OS}\right)+\left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OT}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{OV};\overrightarrow{OT}\right)=3\times\frac{\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OV};\overrightarrow{OT}\right)=\pi$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{OV}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires de sens contraires.
Les points O, T et V sont donc alignés.
Comme ils appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ et que O est le centre de ce cercle, on en déduit que les points T et V diamétralement opposés.

2°)

a) **Déterminons en fonction de α une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OV}\right)$.**

D'après la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OV}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OS}\right)+\left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OU}\right)+\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OV}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OV}\right)=\alpha-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OV}\right)=\alpha-\frac{2\pi}{3}$$

b) **Déduisons-en pour quelles valeurs de α le point V est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.**

V est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB'}$ $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OV}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \alpha-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

3°)

a) **Déterminons en fonction de α une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)$.**

1ère méthode :

Les triangles OSU et OST sont équilatéraux de côté 1 donc OT = TS = SU = OU = 1.
On en déduit que le quadrilatère OTSU est un losange.
Par suite, $\overrightarrow{SU}=\overrightarrow{OT}$.

Donc :

$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{US}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OT}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OS}\right)+\frac{\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\alpha+\frac{\pi}{3}$$

2e méthode :

D'après la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SO}\right)+\left(\overrightarrow{SO};\overrightarrow{SU}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OS}\right)+\left(\overrightarrow{SO};\overrightarrow{SU}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\alpha+\frac{\pi}{3}$$

b) **Déduisons-en pour quelles valeurs de α les droites (AO) et (SU) sont perpendiculaires.**

$(AO)\perp(SU) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{SU}\right)=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ *

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } \alpha+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } \alpha=-\frac{5\pi}{6}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z})$$

* Il fallait bien penser qu'il y avait deux cas : angle droit direct ou angle droit indirect.

IV.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

1°) **Démontrons que l'on a : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.**

On sait que $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$ (relation fondamentale).

On a donc : $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$ d'où $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ soit $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Par suite, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou $\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Or $\frac{\pi}{12}\in[0\,;\pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{12}\geqslant 0$.

On en déduit que $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

2°) **Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et de $\sin\frac{13\pi}{12}$.**

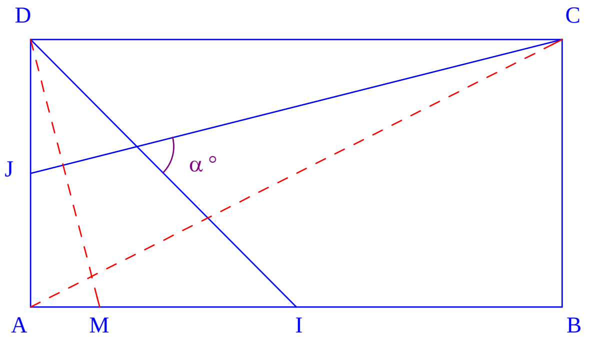
On utilise les formules de trigonométrie (angles associés).

$$\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\frac{13\pi}{12}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

V.

ABCD : rectangle tel que AB = 2 et AD = 1



1°) M ∈ [AB] quelconque

AM = x avec $0\leqslant x\leqslant 2$

a) **Exprimons $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de x.**

On utilise la méthode de décomposition (seule méthode possible ; on ne peut pas utiliser les projetés orthogonaux).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\&=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=-\,AM\times AB+AD\times BC \quad \text{(on enlève les produits scalaires qui sont nuls par orthogonalité)}\\&=-\,x\times 2+1\times 1\\&=1-2x\end{aligned}$$

b) **Déterminons pour quelle valeur de x les droites (DM) et (AC) sont orthogonales.**

(DM) ⊥ (AC) si et seulement si $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

si et seulement si $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

si et seulement si $1-2x=0$

si et seulement si $x=\frac{1}{2}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que (DM) ⊥ (AC) est $x=\frac{1}{2}$.

2°) I : milieu de [AB]

J : milieu de [AD]

α : mesure en degrés de l'angle aigu formé par (DI) et (CJ)

a) **Calculons $\overrightarrow{DI} \bullet \overrightarrow{JC}$.**

On utilise la méthode de décomposition comme à la question 1°) a) (seule méthode possible).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} \bullet \overrightarrow{JC} &= \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\bullet\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DC}\right)\\
&= \overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{DC}\\
&= -\,DA\times JD+AI\times DC \quad \text{(on enlève les produits scalaires nuls par orthogonalité)}\\
&= -\frac{1}{2}+2\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b) **Déterminons la valeur arrondie au centième de α.**

On a : $\overrightarrow{DI} \bullet \overrightarrow{JC} = DI\times JC\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DI}\,;\,\overrightarrow{JC}}\right)$.

Or d'après la figure, $\left(\widehat{\overrightarrow{DI}\,;\,\overrightarrow{JC}}\right)=\alpha°$.

Donc $\overrightarrow{DI} \bullet \overrightarrow{JC} = DI\times JC\times\cos\alpha°$.

Par suite, $\cos\alpha° = \dfrac{\overrightarrow{DI} \bullet \overrightarrow{JC}}{DI\times JC}$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}} \quad \text{(on calcule les longueurs DI et JC à part grâce au théorème de Pythagore)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{34}}$$

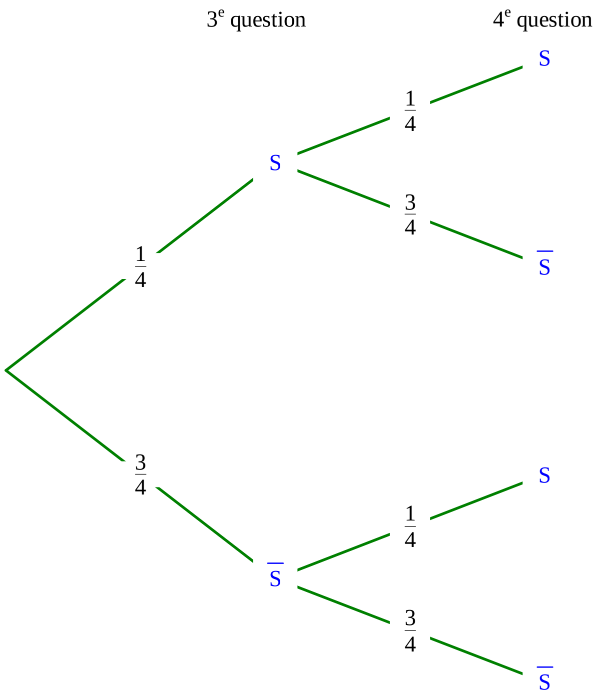
Avec la calculatrice, on trouve α = 59,0362434… .

Donc $\alpha \approx 59{,}04$ (valeur arrondie au centième).

VI.

1°) **Quentin**

Pour répondre aux questions, on dresse un arbre pondéré en utilisant l'événement S : « le candidat donne la réponse correcte ».



a) **Loi de probabilité de X**

• Si le candidat donne deux réponses correctes pour les deux dernières questions, sa note sera : 1 + 1 + 1 = 3.

• Si le candidat donne une réponse correcte et une réponse erronée aux deux dernières questions, sa note sera :

1 – 0,5 + 1 = 1,5.

• Si le candidat donne deux réponses erronées pour les deux dernières questions, sa note sera : 1 – 0,5 – 0,5 = 0.

Donc X peut prendre les valeurs $x_1=0$, $x_2=1{,}5$, $x_3=3$.

$$P\left(X=0\right)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$
$$P\left(X=1{,}5\right)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{16}$$
$$P\left(X=3\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

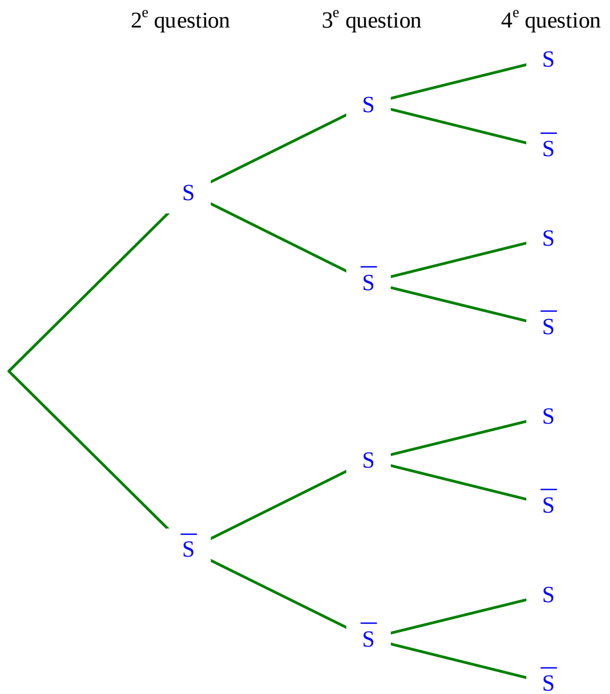
x_i	0	1,5	3	
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	Total = 1

b) **Espérance de X**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0\times\frac{9}{16}+1,5\times\frac{6}{16}+3\times\frac{1}{16}\\
&= \frac{9+3}{16}\\
&= \frac{12}{16}\\
&= \frac{3}{4}\\
&= 0,75
\end{aligned}
$$

2°) **Nicolas**

On dresse à nouveau un arbre de probabilités avec le même événement pour les trois dernières questions.



a) **Loi de probabilité de Y**

Pour le total des points, il y a 4 cas possibles pour les réponses aux trois dernières questions.

3 réponses correctes : 1 + 3 = 4

2 réponses correctes – 1 réponse erronée : 1 + 2 – 0, 5 = 2,5

1 réponse correcte – 2 réponses erronées : 1 – 0,5 – 0,5 + 1 = 1

3 réponses erronées : 1 – 0,5 – 0,5 – 0,5 = – 0,5 ; la note est ramenée à 0 dans ce cas (cf. énoncé).

Y peut prendre les valeurs $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2,5$, $y_4 = 4$.

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}\\
P(Y = 1) &= 3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}\\
P(Y = 2,5) &= 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4} = \frac{9}{64}\\
P(Y = 4) &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

y_i	0	1	2,5	4	
$P(Y = y_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	Total = 1

b) **Espérance de Y**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= 0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2,5\times\frac{9}{16}+4\times\frac{9}{64}\\
&= \frac{27+22,5+4}{64}\\
&= 0,835975
\end{aligned}
$$

3°) **Lucien**

Notons Z la variable aléatoire correspondant à la note de Lucien.

Comme Lucien répond correctement à la première des trois questions et ne répond pas aux trois autres questions, il est certain d’avoir 1 point au QCM.

E (Z) = 1

Comparaison des stratégies

On a : E (Z) > E (Y) > E (X).
Donc Lucien a la meilleure stratégie, suivi de Nicolas et enfin de Quentin.

VII.

1°)

Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n.

$a_{n+1} = a_n + 10$

Exprimons b_{n+1} en fonction de b_n.

$b_{n+1} = b_n \times 1,05$

Déduisons-en la nature des suites (a_n) et (b_n).

La suite (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 500$ et de raison 10.

La suite (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = 400$ et de raison 1,05.

2°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice au bout de combien d'années le capital obtenu par le placement B devient supérieur au capital obtenu par le placement A.**

On peut utiliser la calculatrice ou un programme* (correspondant à un algorithme de seuil avec boucle « Tantque »).

$$\begin{aligned} a_8 &= 500 + 10 \times 8 \\ &= 580 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_8 &= 400 \times (1,05)^8 \\ &= 590,98217\ldots \end{aligned}$$

Au bout de 8 ans, le capital obtenu par le placement B sera environ égal à 590,98 € et celui obtenu par le placement A sera égal à 580 €.

Au bout de la 8^e^ année, le capital obtenu par le placement B est supérieur au capital obtenu par le placement A.

* **Exemple de programme sur calculatrice TI :**

```
: 500 → A
: 400 → B
: 0 → N
: While B < A
: A + 10 → A
: 1,05 ∗ B → B
: N + 1 → N
: End
: Disp N
```