Exercices sur les puissances de matrices

1 Dans chaque cas, calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.

a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 ; en déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2, A^3, A^4 et A^5.
2°) Conjecturer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer le résultat par récurrence.
Vérifier en utilisant le site dcode, rubrique « puissances de matrices ».
3°) Déterminer la matrice J telle que $A = I_2 + J$. Calculer J^2.
À l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver l'expression de A^n en fonction de *n*.

4 On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2°) Calculer PDP^{-1}. Que remarque-t-on ?
3°) En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier en utilisant le site dcode, rubrique « puissances de matrices ».

5 On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1°) À l'aide de la calculatrice, démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2°) Calculer PDP^{-1}. Que remarque-t-on ?
3°) En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier en utilisant le site dcode, rubrique « puissances de matrices ».

6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2 et A^3.
2°) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier en utilisant le site dcode.

7 On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence (S) $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice que l'on définira.
En déduire X_n en fonction de A, X_0 et *n*.

2°) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
b) Démontrer que $A = PDP^{-1}$.
c) Déterminer A^n en fonction de *n* par le calcul. Vérifier à l'aide du site « dcode ».
En déduire a_n et b_n en fonction de *n*.

8 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, par exemple « dcode », calculer A^n où *n* est un entier naturel quelconque dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que les formules fonctionnent pour $n = 0$ et $n = 1$.

9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2, A^3, A^4.
2°) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Comparer avec le résultat obtenu en utilisant le site « dcode » (partie sur les puissances de matrices).

10 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2, A^3 et A^4.
2°) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Comparer avec le résultat obtenu en utilisant le site « dcode ».

11 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (matrice déjà considérée dans l'exercice **8** d)).

1°) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
2°) Calculer les puissances de J d'exposant entier naturel.
3°) En déduire la matrice A^n pour *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Comparer avec le résultat obtenu en utilisant « dcode » dans l'exercice **8** question d)).

$\boxed{12}$ On rappelle la propriété du cours suivante :

> On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels de somme non nulle.
>
> On a alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}$.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,8 & 0,1\\ 0,2 & 0,9\end{pmatrix}$.

En appliquant le résultat du cours rappelé dans l'encadré, calculer A^n pour n entier naturel quelconque.
Comparer avec le résultat obtenu en utilisant « dcode ».

$\boxed{13}$ On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & a & ab\\ \frac{1}{a} & 0 & b\\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 0\end{pmatrix}$ où a et b sont des réels non nuls fixés.

1°) À l'aide du site « dcode », vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.
2°) Démontrer le résultat obtenu en calculant $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}$.

$\boxed{14}$ On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1\\ 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$.

À l'aide du site « dcode », déterminer A^n en fonction de n.
Démontrer que la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge et déterminer sa limite.

$\boxed{15}$ À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite L de la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ dans chacun des cas suivants :

$\boxed{16}$ À l'aide d'un logiciel de calcul formel, par exemple XCas, déterminer la limite L de la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$.

Application des matrices à l'étude de suites
Exercices extraits de la feuille sur les graphes pondérés

Voir le corrigé sur cette feuille d'exercices

$\boxed{9}$ On s'intéresse à l'évolution couplée de deux populations : des chouettes et des souris.
On note respectivement c_n et s_n les nombres respectifs, en milliers, de chouettes et de souris au 1er juin de l'année $2012+n$ (où n désigne un entier naturel).
Les scientifiques modélisent la prédation entre ces deux espèces (chouettes et souris) de la manière suivante.
Pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases}c_{n+1}=0,5\,c_n+0,4\,s_n\\ s_{n+1}=-\,0,104\,c_n+1,1\,s_n\end{cases}$.

Les coefficients 0,5 et 1,1 indiquent la croissance de chaque espèce en isolation. Les chouettes disparaissent sans nourriture tandis que les souris augmentent sans prédateurs.
Les deux autres nombres 0,4 et – 0,104 mesurent la conséquence de la prédation : positif pour les chouettes et négatif pour les souris.
En 2012, on comptait 3000 chouettes et 2000 souris. Ainsi, $c_0=3$ et $s_0=2$.
On se propose d'étudier l'évolution à long terme.

Extrait du document sur suites et matrices de Kevin Tanguy :

Considérons une forêt dans laquelle vivent deux espèces : des lapins et des renards ; les premiers étant les proies des seconds. Nous cherchons à modéliser l'évolution de chacune de ces deux espèces. Pour tout n ∈ N, nous noterons respectivement par (rn)n≥0 et (ln)n≥0 la population de renards et de lapin lors de l'année 2020+n. Il est alors possible de définir un modèle (une version discrète du modèle de proies/prédateurs de Lotka-Volterra) décrivant l'évolution de ces deux espèces. Sans la présence des lapins, la première serait vouée à disparaitre tandis que la population des lapins augmenterait exponentiellement sans la présence des prédateurs. Mathématiquement, cela correspond au système suivant :

$\begin{array}{l}r_{n+1}=0,9r_n+0,01l_n\\ l_{n+1}=-r_n+1,01l_n\end{array}$ et ! $r_0=10$ l0 = 10 000.

Les valeurs des constantes intervenant dans le système ne sont là que pour fixer les idées. Comme nous allons le voir, il est possible de représenter ce système matriciellement. En effet, si pour tout n ∈ N, Xn = " rn ln # nous constatons que Xn+1 = AXn avec A = " 0, 9 0, 01 −1 1, 01# . Nous obtenons alors une suite de matrices (composée ici par des vecteurs colonnes) (Xn)n≥0 vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par une matrice A donnée). Les questions suivantes sont alors naturelles :

• Est-il possible d'exprimer Xn en fonction de n de manière explicite ?
• Que se produit-il si n → +∞?

1°) **Expérimentation sur calculatrice**

Les suites (c_n) et (s_n) sont deux suites « imbriquées ». On les « rentre » ainsi dans la calculatrice.

$n\text{Min}=0$
$\text{u}(n)=0.5\text{u}(n-1)+0.4\text{v}(n-1)$
$\text{u}(n\text{Min})=\{3\}$
$\text{v}(n)=-0.104\text{u}(n-1)+1.1\text{v}(n-1)$
$\text{v}(n\text{Min})=\{2\}$
$\text{w}(n)=\text{v}/\text{u}$
$\text{w}(n\text{Min})=\{2/3\}$

On observera la syntaxe très particulière de l'avant-dernière ligne : $\text{w}(n)=\text{v}/\text{u}$. On écrit juste ça.

a) Remplir un tableau selon le modèle suivant pour *n* allant de 0 à 10 :

n	c_n	s_n	$\frac{s_n}{c_n}$
0	3	2	
1			
2			

b) Que remarque-t-on ? Quelle conjecture peut-on émettre quant à la proportion de chaque espèce à long terme ?
c) L'évolution est-elle influencée par les conditions initiales ?

2°) **Justification avec l'outil matriciel**

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $\text{U}_{n+1}=\text{AU}_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
A s'appelle la matrice « proie-prédateur ».
b) En déduire une relation liant U_n et U_0.
c) On donne les matrices $\text{P}=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{D}=\begin{pmatrix} 1{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}58 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $\text{PDP}^{-1}=\text{A}$. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $\text{A}^n=\text{PD}^n\text{P}^{-1}$ (question à ne pas mettre, en plus il y a une répétition de « en déduire » avec la question suivante).
d) En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de *n*.

e) Déterminer la limite de chacune des suites (c_n), (s_n) et $\left(\frac{s_n}{c_n}\right)$.

f) Répondre au problème posé et vérifier la cohérence avec les conjectures émises au 1°).

$\boxed{9}$ On s'intéresse à l'évolution couplée de deux populations : des chouettes et des souris.
On note respectivement c_n et s_n les nombres respectifs, en milliers, de chouettes et de souris au 1^er juin de l'année $2012+n$ (où *n* désigne un entier naturel).
Les scientifiques modélisent la prédation entre ces deux espèces (chouettes et souris) de la manière suivante.

Pour tout entier naturel *n*, on a $\begin{cases} c_{n+1}=0{,}5\,c_n+0{,}4\,s_n \\ s_{n+1}=-0{,}104\,c_n+1{,}1\,s_n \end{cases}$.

Les coefficients 0,5 et 1,1 indiquent la croissance de chaque espèce en isolation. Les chouettes disparaissent sans nourriture tandis que les souris augmentent sans prédateurs.
Les deux autres nombres 0,4 et – 0,104 mesurent la conséquence de la prédation : positif pour les chouettes et négatif pour les souris.
En 2012, on comptait 3000 chouettes et 2000 souris. Ainsi, $c_0=3$ et $s_0=2$.
On se propose d'étudier l'évolution à long terme.

Extrait du document sur suites et matrices de Kevin Tanguy :

Considérons une forêt dans laquelle vivent deux espèces : des lapins et des renards ; les premiers étant les proies des seconds. Nous cherchons à modéliser l'évolution de chacune de ces deux espèces. Pour tout n ∈ N, nous noterons respectivement par (rn)n≥0 et (ln)n≥0 la population de renards et de lapin lors de l'année 2020+n. Il est alors possible de définir un modèle (une version discrète du modèle de proies/prédateurs de Lotka-Volterra) décrivant l'évolution de ces deux espèces. Sans la présence des lapins, la première serait vouée à disparaitre tandis que la population des lapins augmenterait exponentiellement sans la présence des prédateurs. Mathématiquement, cela correspond au système suivant :

$r_{n+1}=0{,}9r_n+0{,}01l_n$ et ! $r_0=10$ l0 = 10 000.
$l_{n+1}=-r_n+1{,}01l_n$

Les valeurs des constantes intervenant dans le système ne sont là que pour fixer les idées. Comme nous allons le voir, il est possible de représenter ce système matriciellement. En effet, si pour tout n ∈ N, Xn = " rn ln # nous constatons que Xn+1 = AXn avec A = " 0, 9 0, 01 −1 1, 01# . Nous obtenons alors une suite de matrices (composée ici par des vecteurs colonnes) (Xn)n≥0 vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par une matrice A donnée). Les questions suivantes sont alors naturelles :
• Est-il possible d'exprimer Xn en fonction de n de manière explicite ?
• Que se produit-il si n → +∞?

1°) **Expérimentation sur calculatrice**

Les suites (c_n) et (s_n) sont deux suites « imbriquées ». On les « rentre » ainsi dans la calculatrice.

$n\text{Min}=0$
$\text{u}(n)=0.5\text{u}(n-1)+0.4\text{v}(n-1)$
$\text{u}(n\text{Min})=\{3\}$
$\text{v}(n)=-0.104\text{u}(n-1)+1.1\text{v}(n-1)$
$\text{v}(n\text{Min})=\{2\}$
$\text{w}(n)=\text{v}/\text{u}$
$\text{w}(n\text{Min})=\{2/3\}$

On observera la syntaxe très particulière de l'avant-dernière ligne : $\text{w}(n)=\text{v}/\text{u}$. On écrit juste ça.

a) Remplir un tableau selon le modèle suivant pour *n* allant de 0 à 10 :

n	c_n	s_n	$\frac{s_n}{c_n}$
0	3	2	
1			
2			

b) Que remarque-t-on ? Quelle conjecture peut-on émettre quant à la proportion de chaque espèce à long terme ?
c) L'évolution est-elle influencée par les conditions initiales ?

2°) **Justification avec l'outil matriciel**

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $\text{U}_{n+1} = \text{AU}_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
A s'appelle la matrice « proie-prédateur ».
b) En déduire une relation liant U_n et U_0.

c) On donne les matrices $\text{P} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{D} = \begin{pmatrix} 1{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}58 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $\text{PDP}^{-1} = \text{A}$. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $\text{A}^n = \text{PD}^n\text{P}^{-1}$ (question à ne pas mettre, en plus il y a une répétition de « en déduire » avec la question suivante).
d) En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de *n*.

e) Déterminer la limite de chacune des suites (c_n), (s_n) et $\left(\frac{s_n}{c_n}\right)$.

f) Répondre au problème posé et vérifier la cohérence avec les conjectures émises au 1°).

12 Dans les grandes et vieilles forêts de sapins, les chouettes tachetées s'offrent des écureuils volants comme dîner.

On suppose que la matrice proie-prédateur entre ces deux espèces est $\text{A} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ -p & 1{,}2 \end{pmatrix}$ où *p* est un nombre réel strictement positif, appelé le paramètre de prédation.

Pour tout entier naturel *n*, on note x_n le nombre de chouettes et y_n le nombre de d'écureuils au bout de *n* jours.

On pose $\text{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout entier naturel *n*, $\text{U}_{n+1} = \text{AU}_n$.

1°) Utiliser la calculatrice pour répondre aux questions suivantes. On supposera qu'initialement il y a 50 chouettes et 200 écureuils.
a) Constater que si le paramètre de prédation est $p = 0{,}325$, alors les deux populations croissent.
Estimer le taux de croissance, à long terme, et le rapport final « chouettes-écureuils volants ».
b) Constater que si le paramètre de prédation est $p = 0{,}5$, alors les deux espèces finissent par s'éteindre.
c) Chercher une valeur du paramètre *p* pour laquelle les deux populations tendent vers des niveaux constants.

Quelles sont les tailles relatives des populations dans ce cas-là ?

2°) Pour quelle valeur de *p* existe-t-il un état stable, c'est-à-dire une matrice colonne $\text{S} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $a + b = 1$ telle que $\text{AS} = \text{S}$? Confronter avec la conjecture émise à la question 1°) c).

13 Modèle de Lotka-Volterra discret

Version 1 :

Livre Thomas Petit édition Ellipses Contrôle continu spécialité mathématiques

On considère deux populations :
- Les prédateurs dont l'effectif est représenté par la suite (x_n).
- Les proies dont l'effectif est représenté par la suite (y_n).

Lotka (1880-1949) et Volterra (1860-1940) ont montré qu'elles évoluaient suivant les équations ci-après, appelées équations de Lotka-Volterra : $\begin{cases} x_{n+1} = (1-d)x_n + cx_ny_n \\ y_{n+1} = (1+a)y_n - bx_ny_n \end{cases}$ (attention, le mot équation n'a, ici, pas le sens habituel en mathématiques).
- *n* (la variable des suites) représente le temps en années.
- *d* est un paramètre biologique de perte naturelle de prédateurs (lutte de territoire ou pollution).
- *c* est un paramètre biologique d'augmentation (meilleure natalité) des prédateurs lorsqu'ils mangent des proies (lors des x_ny_n rencontres possibles entre proies et prédateurs).
- *a* est un paramètre d'augmentation naturelle des proies.
- *b* est un paramètre biologique de perte de proies (des proies se font manger par les prédateurs) lors des x_ny_n rencontres possibles entre proies en prédateurs.

Les relations de récurrence permettent l'étude des populations sous la forme de suites couplées.
Il n'est pas possible dans le cas général de déterminer des expressions de x_n et y_n en fonction de *n*.
Il est donc inutile de chercher leurs expressions en fonction de *n*.

1°) Écrire une feuille de calcul Excel permettant de déterminer x_n et y_n avec les paramètres suivants : $a = 0{,}08$; $b = 0{,}0001$; $c = 0{,}00005$; $d = 0{,}05$ et pour $x_0 = 900$ et $y_0 = 1100$ sur une durée de 500 ans.
Représenter le nuage de points $(x_n\,;\,y_n)$ pour *n* compris entre 0 et 500.

2°) On considère qu'il y a équilibre lorsque les suites (x_n) et (y_n) ne s'annulent pas et qu'elles sont constantes, c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n* $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = y_n$.

Démontrer qu'il y a équilibre lorsque pour tout entier naturel *n*, $x_n = \frac{a}{b}$ et $y_n = \frac{d}{c}$ (on aura en particulier $x_0 = \frac{a}{b}$ et $y_0 = \frac{d}{c}$).

3°) Modifier dans le tableur $x_0 = 900$ par $x_0 = \frac{a}{b}$ et $y_0 = 1100$ par $y_0 = \frac{d}{c}$.

Que peut-on constater graphiquement ?
On rappelle que : $a = 0{,}08$; $b = 0{,}0001$; $c = 0{,}00005$; $d = 0{,}05$.

4°) On suppose qu'on se place au voisinage du point d'équilibre, c'est-à-dire que : $x_0 \approx \frac{a}{b}$ et $y_0 \approx \frac{d}{c}$.

Sous ces conditions, on considère que les équations de Lotka-Volterra sont à peu près « équivalentes » aux équations suivantes : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{ca}{b} y_n - \dfrac{ad}{b} \\ y_{n+1} = -\dfrac{bd}{c} x_n + y_n + \dfrac{ad}{c} \end{cases}$.

(On dit qu'on a *linéarisé* les équations de Lotka-Volterra au voisinage du point d'équilibre.)

a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\dfrac{ad}{b} \\ \dfrac{ad}{c} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$.

b) Déterminer le vecteur colonne C constant vérifiant $C = AC + B$.

c) En déduire que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 - \dfrac{a}{b} \\ y_0 - \dfrac{d}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{d}{c} \end{pmatrix}$.

d) Application numérique :
En déduire une approximation des deux populations dans 5 ans (toujours avec $a = 0{,}08$; $b = 0{,}0001$; $c = 0{,}00005$; $d = 0{,}05$) et pour $x_0 = 810$ et $y_0 = 1010$.
Comparer avec les résultats donnés par le tableur.

On constate alors cette drôle de spirale qui s'explique biologiquement de la manière suivante ; au moment où les proies augmentent, il y a plus à manger : mécaniquement les prédateurs se sentent « mieux » et se multiplient davantage, leur nombre augmente. Lorsqu'ils deviennent plus nombreux, ils mangent plus (enfin pas chacun individuellement mais au total), il y a donc moins de proies (leur nombre va diminuer). S'il y a moins de proies, les prédateurs mangent moins, se sentent donc moins bien et vont diminuer en nombre, et ainsi de suite : la bouble est bouclée !

On peut constater que les résultats sont très proches et donc que le procédé de linéarisation au voisinage du point d'équilibre est très précis. Graphiquement on peut voir aussi la spirale se concentrer de manière très proche du point d'équilibre (un peu comme s'il était attiré par lui !)

Version 2 :

On s'intéresse à l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse.
On désigne par T_n et B_n les nombres respectifs de truites et de brochets dans la Meuse le premier juin de l'année $2001+n$.
On sait qu'entre une année $2001+n$ et la suivante :
• le nombre de truites augmente de 10 % mais lors des $T_n \times B_n$ rencontres possibles entre les deux espèces, seules 0,1 % ont effectivement lieu et à chacune d'entre elles la truite est dévorée par le brochet ;
• parmi les B_n brochets, 5 % meurent uniquement à cause de leur sensibilité à la toxicité de l'eau de la Meuse mais le fait de dévorer des truites permet aux brochets de se reproduire (naissance de nouveaux brochets).
Ainsi, le nombre de nouveaux brochets est estimé à 50 % du nombre de truites dévorées.

1°) Étude des suites (T_n) et (B_n)

a) Vérifier que, pour tout entier naturel *n*, on a : $\begin{cases} T_{n+1} = 1{,}1T_n - 0{,}001T_n \times B_n \\ B_{n+1} = 0{,}95B_n + 0{,}0005T_n \times B_n \end{cases} \quad (1)$.

b) Quelle est la nature de la suite (T_n) lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ? Quels sont son sens de variation et sa limite ?

c) Quelle est la nature de la suite (B_n) lorsqu'il n'y a pas de proies ? Quels sont son sens de variation et sa limite ?

d) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $\begin{cases} T_{n+1} - T_n = T_n(0{,}1 - 0{,}001B_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-0{,}05 + 0{,}0005T_n) \end{cases}$.

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?

2°) À l'aide de la calculatrice

En 2001, dans le secteur étudié, on comptait 210 truites et 50 brochets.

a) Rentrer les suites dans la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs donnant le nombre de proies (truites) et le nombre de prédateurs (brochets) au cours des 200 années suivant 2001.

b) Pour avoir une idée de l'évolution de ces deux populations, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux truites d'une part et aux brochets d'autre part.
De quel type d'évolution s'agit-il ?

Indication pour la calculatrice :

Après avoir configuré la touche $\boxed{\text{fenêtre}}$, aller dans $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{zoom}}$ (format) puis sélectionner $f(n)$ et aller enfin dans $\boxed{\text{trace}}$.

Pour s'en convaincre, représenter le nuage de points de coordonnées $(T_n ; B_n)$.

Indication pour la calculatrice :

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{zoom}}$ (format)
Sur la 1ère ligne, choisir uv puis appuyer sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$ puis $\boxed{\text{fenêtre}}$.
$n\text{Min} = 0$
$n\text{Max} = 500$
$\text{DbutTracé} = 1$
$\text{PasTracé} = 1$
$\text{X min} = 0$
$\text{X max} = 500$
$\text{Xgrad} = 1$
$\text{Y min} = 0$
$\text{Y max} = 400$
$\text{Ygrad} = 1$

c) Interpréter concrètement cette évolution.

d) Faire varier les données initiales. L'évolution est-elle fortement influencée par celles-ci ?
Illustrer le résultat de la question 2°) d).

3°) Étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre

a) Déterminer les réels T et B tous deux non nuls tels que $\begin{cases} T = 1{,}1T - 0{,}001T \times B \\ B = 0{,}95B + 0{,}0005T \times B \end{cases}$.

La matrice constante $U = \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}$ est alors appelée le point d'équilibre.

b) On se place au voisinage du point d'équilibre en posant $t_n = T_n - 100$ et $b_n = B_n - 100$, pour tout entier naturel *n*.

Démontrer que le système (1) (question 1°) a)) équivaut au système $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0{,}1b_n - 0{,}001t_nb_n \\ b_{n+1} = 0{,}05t_n + b_n + 0{,}0005t_nb_n \end{cases}$.

On peut considérer le terme t_nb_n comme négligeable au voisinage du point d'équilibre. Ainsi, le système (1) peut être approximé par le système (2) $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}05t_n + b_n \end{cases}$.

c) On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} t_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

Démontrer que le système (2) est équivalent à $\text{V}_{n+1} = \text{AV}_n$ où A est une matrice carrée que l'on déterminera.

En déduire que pour tout entier naturel *n*, on a : $\text{V}_n = \text{A}^n\text{V}_0$.

d) À l'aide de la calculatrice, conforter ou invalider les conjectures émises.

Note : Durant la Première Guerre mondiale, la pêche dans la mer Adriatique avait été restreinte. Le zoologiste italien Umberto d'Ancona remarqua que le pourcentage de poissons était supérieur à celui du début de la guerre.
Il demanda à Vito Volterra de construire un modèle mathématique qui expliquerait ces observations.

Alfred James Lotka est un statisticien né en 1880 à Lviv, en Ukraine de parents américains. Il généralisa les travaux de Pierre-François Verhulst et Vita Volterra sur la dynamique des populations.

Solutions détaillées

1 Dans chaque cas, calculons $\mathbf{D}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans les deux cas, on applique la propriété sur les matrices diagonales.

a) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D est une matrice diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \text{D}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

D est une matrice diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \text{D}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calculons $\mathbf{A}^2$.

$$\text{A}^2 = \text{A} \times \text{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{A}$$

Autre méthode : (rédigée à la suite d'une demande de Caroline Quériaud le 24-3-2016 *)

$A^2 = A \times A$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$= A$

* Elle m'a posé la question : « Pourquoi ce n'est pas $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$? »

Déduisons-en l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = A$.

On dit que la matrice A est **idempotente**.

$\boxed{3}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°) **Calculons A^2, A^3, A^4, A^5.**

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut utiliser la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice.
Attention, la matrice A est triangulaire supérieure. Ce n'est pas une matrice diagonale.
On n'a donc pas de formule qui donne l'expression de A^n en fonction de *n* pour *n* entier naturel quelconque.

2°)

Conjecturons A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On observe que :

$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut donc conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrons le résultat par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.

Par définition, on a $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut donc écrire $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la phrase $P(0)$ est vraie.

Supposons que la phrase $P(k)$ soit vraie pour un entier naturel *k* fixé, c'est-à-dire $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Autre rédaction :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

.

On a : $A^{k+1}=A^k\times A$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2k+2\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2(k+1)\\0 & 1\end{pmatrix}$$

D'où la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
D'après le principe de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Autre méthode :

On écrit $A=I_2+B$ avec $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que B est une matrice nilpotente d'ordre 2 ($B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$).

On a $I_2B=BI_2=B$.
On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton qui donne immédiatement le résultat.

$\boxed{4}$

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\\mathbf{3} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1}\\\mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$

1°) **Démontrons que P est inversible et déterminons P^{-1}.**

$\det P=(-1)\times(-3)-1\times1=2$

Le déterminant de P est non nul donc P est inversible.

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

2°) **Calculons PDP^{-1}.**

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\quad\text{(on met le }\tfrac{1}{2}\text{ devant)}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}$$
$$=M$$

2°) **Déduisons-en M^n pour $n\in\mathbb{N}$.**

On sait que $PDP^{-1}=M$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad M^n=PD^nP^{-1}$ (propriété du cours).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad M^n=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3^n\\1 & -3^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{3-3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2}\\\frac{-3+3^{n+1}}{2} & \frac{-1+3^{n+1}}{2}\end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

1°)

Avec la calculatrice, on observe que P est inversible et on obtient $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

On ne peut pas justifier que P est inversible autrement que par la calculatrice. En effet, P est une matrice carrée d'ordre 3 et la notion de déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 n'a pas été étudiée.

2°) **Calculons PDP^{-1}.**

$$PDP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\-1 & 3 & -1\\3 & -3 & 1\end{pmatrix}$$
$$=M$$

2°) **Déduisons-en M^n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$).**

On a : $M = PDP^{-1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = PD^nP^{-1}$ (propriété du cours)

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} \\ 1-2^n & 1+2^n & 1-2^n \\ (-1)^{n+1}+2^n & (-1)^n-2 & (-1)^n+2^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) **Calculons A^2 et A^3.**

À la calculatrice ou à la main, on trouve :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

2°) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier en utilisant le site dcode.

On constate que $A^2 = 3A$.
D'après un résultat du cours, on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = 3^{n-1}A$.

Il s'agit de la propriété : « Si $A^2 = qA$ où q est un réel, alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = q^{n-1}A$ ».

On peut donc écrire $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$

(a_n) et (b_n) : suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence (S) $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$

Il s'agit de l'étude de suites couplées définies par des relations linéaires.

1°)

Posons $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad AX_n = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8a_n + b_n \\ 2a_n + 9b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= X_{n+1}$$

D'après le cours, on peut aisément exprimer X_n en fonction de A, X_0 et n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$

3°) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

a) **Calculons P^{-1}.**

Le déterminant de P est égal à $\det P = 1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3$.

$\det P \neq 0$ donc P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Démontrons que $A = PDP^{-1}$.**

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & 10\\ -7 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}24 & 3\\ 6 & 27\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8 & 1\\ 2 & 9\end{pmatrix}$$

$$= A$$

c)

Déterminons A^n en fonction de n par le calcul.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad = P\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}^n P^{-1} eeee$$

$$\forall n \in \mathbb{N} eee \qquad = P\begin{pmatrix}7^n & 0\\ 0 & 10^n\end{pmatrix} P^{-1} eee$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7^n & 0\\ 0 & 10^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} eeee$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\times 7^n & -7^n\\ 10^n & 10^n\end{pmatrix} eeeee$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\times 7^n + 10^n & -7^n + 10^n\\ -2\times 7^n + 2\times 10^n & 7^n + 2\times 10^n\end{pmatrix} eee$$

On vérifie à l'aide du site « dcode ».

Déduisons-en a_n et b_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ [on écrit X_n]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\times 7^n + 10^n & -7^n + 10^n\\ -2\times 7^n + 2\times 10^n & 7^n + 2\times 10^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\times 7^n + 2\times 10^n - 7^n + 10^n\\ -4\times 7^n + 4\times 10^n + 7^n + 2\times 10^n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\times 7^n + 3\times 10^n\\ -3\times 7^n + 6\times 10^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}7^n + 10^n\\ -7^n + 2\times 10^n\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = 7^n + 10^n \\ b_n = -7^n + 2\times 10^n \end{cases}$.

8

a) $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix}2 - 2^n & 2^n - 1\\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1\end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$, on a $\begin{pmatrix}2 - 2^0 & 2^0 - 1\\ 2 - 2^{0+1} & 2^{0+1} - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1 & 1-1\\ 2-2 & 2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Or on sait que $A^0 = I_2$.

La formule fonctionne donc pour $n = 0$.

Pour $n = 1$, on a $\begin{pmatrix}2 - 2^1 & 2^1 - 1\\ 2 - 2^{1+1} & 2^{1+1} - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2 & 2-1\\ 2-4 & 4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Or on sait que $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

La formule fonctionne donc pour $n = 1$.

b) $A = \begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix}3n + 1 & 3n\\ -3n & 1 - 3n\end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^n-1 & 2^n\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n\\ n(n-2) & 4n & 2n+1\end{pmatrix}$

> On vérifie que les formules fonctionnent pour $n=0$ et $n=1$ en se souvenant que $A^0=I$ où I désigne la matrice identité d'ordre *p* (*p* étant la taille de la matrice A) et $A^1=A$.

9 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

1°)

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$ $\qquad A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2°) On a $A^2=I_2$ donc la suite (A^n) est périodique de période 2.

On utilise la propriété du cours suivante.

> Soit A une matrice carrée.
>
> S'il existe un entier naturel $p\geqslant 1$ tel que $A^p=I$, alors la suite (A^n) est périodique de période *p* (c'est un résultat de cours).

Ainsi :

- pour tout entier naturel *n* pair, on a $A^n=I_2$;
- pour tout entier naturel *n* impair, on a $A^n=A$.

Comparer avec le résultat obtenu avec le site « dcode ».

Avec « dcode, on obtient $A^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^n & 1-(-1)^n\\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n\end{pmatrix}$.

La formule coïncide bien puisque pour *n* pair $(-1)^n=1$ et pour *n* impair $(-1)^n=-1$.
Il est intéressant d'avoir une formule unifiée.

10

$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

1°)

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$ $\qquad A^4=A\times A^3=A\times I_3=A$

2°) Il y a plusieurs manières de répondre à la question.

La suite (A^n) est périodique de période 3.

> Soit A une matrice carrée.
>
> S'il existe un entier naturel $p\geqslant 1$ tel que $A^p=I$, alors la suite (A^n) est périodique de période *p* (c'est un résultat de cours).

Ainsi :

- pour tout entier naturel *n* de la forme 3*k* avec *k* entier naturel, on a $A^n=I_2$;
- pour tout entier naturel *n* de la forme $3k+1$ avec *k* entier naturel, on a $A^n=A$;
- pour tout entier naturel *n* de la forme $3k+2$ avec *k* entier naturel, on a $A^n=A^2$.

Comparer avec le résultat obtenu avec le site « dcode ».

L'expression obtenue avec « dcode» utilise des nombres complexes mais n'est pas facile à comparer.

$\boxed{\textbf{11}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (matrice déjà considérée dans l'exercice $\boxed{\textbf{8}}$ d)).

1°) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

On écrit $J = A - I_3$ ce qui donne $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2°) Calculer les puissances de J d'exposant entier naturel.

On calcule les premières puissances à la main ou à la calculatrice.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'après une propriété du cours, on peut dire que $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

3°) En déduire la matrice A^n pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Comparer avec le résultat obtenu en utilisant « dcode » dans l'exercice $\boxed{\textbf{8}}$ question d)).

On applique la formule du cours suivante qui découle de la formule du binôme de Newton pour les matrices.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} J^k$$

Comme toutes les puissances de J d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 3 sont égales à la matrice nulle,

pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $A^n = \sum_{k=0}^{k=2} \binom{n}{k} J^k$ ce qui donne

$$A^n = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 = J^0 + nJ^1 + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

On obtient aisément $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 2n+1 \end{pmatrix}$.

On constate que la formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Donc on obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 2n+1 \end{pmatrix}$ résultat qui coïncide avec celui obtenu dans l'exercice $\boxed{\textbf{8}}$ en utilisant « dcode ».

$\boxed{\textbf{12}}$

> On pose $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels de somme non nulle.
>
> On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$

On observer que $A = \begin{pmatrix} 1-0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 1-0,1 \end{pmatrix}$ (réécriture de la matrice A).

On reconnaît une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $a = 0,2$ et $b = 0,1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{0,2+0,1}\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \frac{(1-0,2-0,1)^n}{0,2+0,1}\begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,3}\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \frac{(1-0,3)^n}{0,3}\begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(0,7)^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times(0,7)^n & 1-(0,7)^n \\ 2-2\times(0,7)^n & 2+(0,7)^n \end{pmatrix}$$ (on peut conserver le coefficient $\frac{1}{3}$ en facteur)

On vérifie le résultat avec celui fourni par le site « dcode ».

$\boxed{13}$

1°)

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{ab}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{1}{2ab} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2°) On a $A^2-A=2I_3$.

Rappel : I_3 est la matrice identité d'ordre 3. Autrement dit, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

De même, I_2 est la matrice identité d'ordre : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette relation peut s'écrire $A\left(A-I_3\right)=2I_3$ ou encore $A\times\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)=I_3$.

On en déduit que A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)$.

On retrouve l'expression obtenue avec « dcode ».

$\boxed{14}$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix} 0,25\times 0,5^n+0,75\times 0,1^n & 0,25\times 0,5^n-0,25\times 0,1^n \\ 0,75\times 0,5^n-0,75\times 0,1^n & 0,25\times 0,1^n+0,75\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

On a $-1<0,5<1$ et $-1<0,1<1$ donc $0,5^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0,1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On en déduit $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La suite $\left(A^n\right)$ converge vers la matrice nulle.