# TS Exercices sur les intégrales

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{11}$, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence.

$\boxed{1}$ $I=\int_1^5\left(x^2+x-\dfrac{1}{x}\right)\,dx$ $\boxed{2}$ $I=\int_1^5\dfrac{dx}{2x-1}$ $\boxed{3}$ $I=\int_{-4}^{-2}\dfrac{dx}{x+1}$ $\boxed{4}$ $I=\int_1^5\dfrac{\ln x}{x}\,dx$ $\boxed{5}$ $I=\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$\boxed{6}$ $I=\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx$ $\boxed{7}$ $I=\int_1^e\dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ $\boxed{8}$ $I=\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ (ou $I=\int_0^1 x\,e^{(x^2)}\,dx$

$\boxed{9}$ $I=\int_0^3\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ $\boxed{10}$ $I=\int_3^4\dfrac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}\,dx$ $\boxed{11}$ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\boxed{12}$ On considère la fonction $f:x\mapsto\ln(\ln x)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $f$.

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Calculer $I=\int_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$ après avoir justifié son existence.

$\boxed{13}$ **Sans aucun calcul,** donner le signe de chacune des intégrales suivantes :

$A=\int_2^4\ln(1+x)\,dx$ ; $B=\int_0^{\frac{1}{2}}-e^{x+3}\,dx$ ; $C=\int_{-2}^{-6}\sqrt{2-x}\,dx$ ; $D=\int_0^1\dfrac{dx}{x-3}$.

$\boxed{14}$ Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;5]$ telles que $\int_0^2 f(x)\,dx=-3$ ;

$\int_2^5 f(x)\,dx=4$ ; $\int_0^5 g(x)\,dx=3$.

Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$ ; $\int_0^5\left[2f(x)-5g(x)\right]dx$ ; $\int_2^0 f(x)\,dx$.

$\boxed{15}$ Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-2\,;7]$ telle que $\int_{-2}^7 f(x)\,dx=5$ et

$\int_4^7 f(x)\,dx=-1$.

Calculer $\int_{-2}^4 f(x)\,dx$.

$\boxed{16}$ Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que pour tout $x\in[0\,;1]$ on ait

$x^2\leqslant f(x)\leqslant x$.

Donner un encadrement de $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

$\boxed{17}$ On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$.

1°) Justifier brièvement l'existence de I et J.

2°) Calculer $I+J$ et $I-J$ ; en déduire les valeurs de I et J.

On rappelle que pour tout réel $x$ on a $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

$\boxed{17\text{ bis}}$ Soit $u$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a<b$.

On pose $I=\int_a^b\cos^2\left[u(x)\right]dx$ et $J=\int_a^b\sin^2\left[u(x)\right]dx$.

Calculer $I+J$ en fonction de $a$ et $b$.

Donner une expression de $I-J$ sous la forme d'une seule intégrale.

$\boxed{18}$ On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

On pose $I_1=\int_0^1 f(x)\,dx$ et $I_2=\int_0^1 g(x)\,dx$.

1°) Calculer $I_1$.

2°) Calculer $I_1+I_2$ ; en déduire la valeur de $I_2$.

$\boxed{18\text{ bis}}$ On pose $I=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^2+1}\,dx$ et $J=\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}\,dx$.

1°) Sans calculer I et J, calculer $I+J$.

2°) On admet que $J=\dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de I.

$\boxed{19}$ On considère la fonction $f:x\mapsto|x-3|$.

On pose $I=\int_1^4 f(x)\,dx$.

1°) Justifier l'existence de I.

2°) Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de $x$.

3°) En écrivant $I=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$, calculer I.

Dans les exercices $\boxed{20}$ à $\boxed{25}$, calculer l'intégrale I à l'aide d'une intégration par parties.

$\boxed{20}$ $I=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$ $\boxed{21}$ $I=\int_0^1 xe^x\,dx$ $\boxed{22}$ $I=\int_1^2 x\ln x\,dx$

$\boxed{23}$ $I=\int_1^2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (écrire : $I=\int_1^2\ln x\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$)

$\boxed{24}$ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\,dx$ (écrire : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\times\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$)

$\boxed{25}$ $I=\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (écrire $I=\int_0^1 x\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$)

**26** Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ à l'aide de deux intégrations par parties.

**27** Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^{1} x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide de deux intégrations par parties.

**28** Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \sin x$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Interpréter géométriquement la valeur moyenne et faire apparaître cette valeur moyenne sur le graphique.

**29** Calculer $\mathrm{I}=\int_1^{x} \ln t\,\mathrm{d}t$ (où $x$ est un réel strictement positif) à l'aide d'une intégration par parties.

On prendra $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$.

---

Pour les exercices suivants, il faut bien faire les courbes (ne pas se contenter d'un tracé sur calculatrice !).

---

**30** 1°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2-9$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2°) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

3°) Calculer l'aire (en unité d'aire) du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Hachurer le domaine sur la figure.

**31** 1°) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -x^2+4x$ (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).
2°) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
3°) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en $\mathrm{cm}^2$ (valeur exacte sous forme fractionnaire).
Hachurer le domaine sur la figure.

**32** Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm (ou 4 « gros » carreaux).

1°) Tracer sur un même graphique la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.

2°) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
3°) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\Delta$ (hachurer le domaine sur la figure).

**33** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur un graphique en prenant le cm comme unité de longueur.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.

**34** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$.

On ne demande pas de calculer $f(x)$ en fonction de $x$.

1°) Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2°) Déterminer le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

3°) À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-5\,;5]$ avec un pas de 0,5 et tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on prendra le centimètre pour unité graphique).
Vérifier le tracé grâce à la calculatrice.

Attention :
Le tracé est très lent. La calculatrice calcule l'intégrale pour chaque valeur de $x$. Je conseille de faire le tracé sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

**35** 1°) On considère la fonction F définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de $x$.

Justifier que F est bien définie sur $]-1\,;+\infty[$.

Démontrer que F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2°) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x)=\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Justifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}\left(x^2\right)$, démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Il est possible de tracer la représentation graphique de G sur calculatrice.

# Corrigé

Pour les exercices de calculs d'intégrales, il est évidemment très intéressant de vérifier tous les résultats en utilisant la calculatrice (valeur approchée) ou mieux un logiciel de calcul formel sur ordinateur qui pourra donner une valeur exacte.

**1** $\mathbf{I=\int_1^5\left(x^2+x-\frac{1}{x}\right)\,dx}$

La fonction $f : x \mapsto x^2+x-\frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $[1\,;5]$ (somme de fonctions continues) donc $f$ est intégrable sur l'intervalle $[1\,;5]$.

Une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\ln x$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\ln x\right]_1^5\\
&=\left(\frac{5^3}{3}+\frac{5^2}{2}-\ln 5\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-\ln 1\right)\\
&=\left(\frac{125}{3}+\frac{25}{2}-\ln 5\right)-\frac{5}{6}\\
&=\frac{160}{3}-\ln 5
\end{aligned}$$

**2** $\mathbf{I=\int_1^5 \frac{dx}{2x-1}}$

Remarque d'écriture : $\mathrm{I}=\int_1^5\frac{dx}{2x-1}=\int_1^5\frac{1}{2x-1}\,dx$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ comme fonction rationnelle (même s'il n'y a pas de $x$ au numérateur) donc par restriction sur l'intervalle $[1\,;5]$.

**Rappel d'une règle sur les primitives que l'on utilise ici.**

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a$ soit non nul est la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{a}\ln|ax+b|$.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ sur chacun des intervalles où elle est définie est la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln|2x-1|$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^5\\
&=\left(\frac{1}{2}\ln|10-1|\right)-\left(\frac{1}{2}\ln|2-1|\right)\\
&=\frac{1}{2}\ln 9\\
&=\ln 3
\end{aligned}$$

**3** $\mathbf{I=\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{x+1}}$

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur chacun des intervalles où elle est définie est la fonction $F : x \mapsto \ln|x+1|$ (les valeurs absolues de sécurité s'avèrent très importantes ici).

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\left[\ln|x+1|\right]_{-4}^{-2}\\
&=\ln|-1|-\ln|-3|\\
&=-\ln 3
\end{aligned}$$

Au début du calcul, on peut écrire $\mathrm{I}=\left[1\times\ln|x+1|\right]_{-4}^{-2}$ pour bien montrer la formule utilisée.

**4** $\mathbf{I=\int_1^5\frac{\ln x}{x}\,dx}$

On peut écrire : $\mathrm{I}=\int_1^5\frac{1}{x}\times\ln x\,dx$.

On reconnaît la forme $uu'$ dont la primitive est $\frac{u^2}{2}$.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^5\\
&=\frac{(\ln 5)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}\\
&=\frac{(\ln 5)^2}{2}
\end{aligned}$$

**Remarque :** $(\ln 5)^2\neq 2\ln 5$ (autrement dit, on ne peut pas transformer $(\ln 5)^2$ en $2\ln 5$)

Attention à la place du carré, on a : $\ln\left(5^2\right)=2\ln 5$.

**5** $\mathbf{I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx}$

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

On pose $u(x)=e^x+1$ ; $u'(x)=e^x$ ; $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Un primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *F* définie par $F(x)=\ln\left|u(x)\right|=\ln\left|e^x+1\right|=\ln\left(e^x+1\right)$.

$$\begin{aligned}I&=\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln 2}\\&=\ln\left(e^{\ln 2}+1\right)-\ln\left(e^0+1\right)\\&=\ln 3-\ln 2\\&=\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

**6** $\mathbf{I=\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx}$

$$I=\int_1^6\sqrt{x+3}\ \,dx=\int_1^6(x+3)^{\frac{1}{2}}\ \,dx=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_1^6=\left(\frac{2\times 9^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{2\times 4^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=\frac{54}{3}-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

Primitive d'une fonction de la forme $u'u^{\alpha}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Détail : $9^{\frac{3}{2}}=\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(\sqrt{9}\right)^3=3^3$

*Petit complément sur les exposants fractionnaires :*

*a* désigne un réel positif ou nul.

- $a^{\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$
- $a^{\frac{3}{2}}=a\times a^{\frac{1}{2}}$
- $a^{\frac{3}{2}}=a\sqrt{a}$

**7** $\mathbf{I=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx}$

$$\begin{aligned}I&=\left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e\\&=\frac{(\ln e)^3}{3}-\frac{(\ln 1)^3}{3}\\&=\frac{(\ln e)^3}{3}\\&=\frac{1^3}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

**8** $\mathbf{I=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx}$

On pense à la forme $u'e^u$.

On effectue la réécriture $xe^{\left(x^2\right)}=\dfrac{1}{2}\times 2x\times e^{\left(x^2\right)}$.

Une primitive de la fonction $f:x\mapsto xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F:x\mapsto\dfrac{e^{x^2}}{2}$.

En posant $u(x)=x^2$, on peut écrire $f=\dfrac{1}{2}\times u'\times e^u$ ce qui permet de prendre pour primitive de *f* la fonction $F=\dfrac{1}{2}e^u$.

$$\begin{aligned}I&=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1\\&=\frac{e^1}{2}-\frac{e^0}{2}\\&=\frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

**9** $\mathbf{I=\int_0^3\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}$

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ ; on pose $u(x)=x^2+x+1$ ; $u'(x)=2x+1$ ; $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ;

$F(x)=\ln\left|u(x)\right|=\ln\left|x^2+x+1\right|=\ln\left(x^2+x+1\right)$ (on utilise des valeurs absolues de sécurité que l'on enlève après)

$I=\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]_0^3=\ln 13$

**10** Il faut écrire : $\dfrac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}=\dfrac{x^3}{x^2}-4\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ ; $\mathrm{I}=\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{12}$

**Solution détaillée :**

**Calculons $\mathrm{I}=\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.**

Comme on ne peut pas déterminer directement une primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}$, on va transformer l'expression comme une somme de quotients.

$$\mathrm{I}=\int_3^4 \frac{x^3-4x^2+x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_3^4 \left(x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-4x+\ln x-\frac{1}{x}\right]_3^4$$

$$=\ln\frac{4}{3}-\frac{5}{12}$$

• Il fallait penser à effectuer une réécriture du quotient en séparant chaque terme du numérateur de manière à obtenir une somme pour laquelle on puisse aisément déterminer une primitive.
(La division polynomiale revient à effectuer cette transformation).

• On aurait pu mettre $x$ entre valeur absolue lors de l'écriture de l'expression « $\ln|\,x\,|$ ».

**11** **$\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$**

On utilise une primitive de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Une primitive de la fonction $x\mapsto \tan x$ est la fonction $x\mapsto -\ln|\cos x|$ (reconnaissance de la forme $-\dfrac{u'}{u}$).

$$\mathrm{I}=\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|+\ln|\cos 0| \qquad \left(\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+\ln|1|$$

$$=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\ln\sqrt{2}$$

$$=\frac{\ln 2}{2}$$

Variante un peu moins bien au niveau de la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ écrite sous la forme $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ :

$$\mathrm{I}=\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|+\ln|\cos 0|$$

$$=-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|+\ln|1|$$

$$=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\ln\sqrt{2}+\ln 2$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2$$

$$=\frac{\ln 2}{2}$$

**12** 1°) $\mathcal{D}=\left]1\,;+\infty\right[$ ; 2°) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ ; 3°) $\mathrm{I}=\ln 2$

**Solution détaillée :**

***$f : x\mapsto \ln(\ln x)$***

1°) **Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

$$f(x)\text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x>1$$

$\mathcal{D}=\left]1\,;+\infty\right[$

2°) **Calculons $f'(x)$.**

*f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x\in\mathcal{D} \quad f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ (rappel : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ , on écrit $f(x)=\ln[u(x)]$ avec $u(x)=\ln x$)

$\forall x\in\mathcal{D} \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\ln x}$

$\forall x\in\mathcal{D} \quad f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

3°) **Calculons** $\mathbf{I}=\int_{e}^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

La fonction $f$ est continue sur $D$ donc sur $\left[e\,;e^2\right]$.

Par conséquent $f$ est intégrable sur $\left[e\,;e^2\right]$.

$I=\int_{e}^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

$I=\left[\ln(\ln x)\right]_{e}^{e^2}$

$I=\ln\left(\ln e^2\right)-\ln(\ln e)$

$I=\ln 2-\ln 1$

$I=\ln 2$

Il faut être capable de faire la question 3°) sans indication (sans les questions 1°) et 2°)).

13 On fera attention à l'ordre des bornes ! + ; – ; – ; – .

**Solution détaillée :**

On utilise la propriété du signe d'une intégrale.

Soit $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a\leqslant b)$.

- Si $f\geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ **(positivité de l'intégrale)**.
- Si $f\leqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$.

Il faut mener une réflexion au niveau des bornes et au niveau du signe de la fonction (ordre des bornes et signe de ce qui est dans l'intégrale).

$\mathbf{A}=\int_2^4\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

$\forall x\in[2\,;4]$

$\ln(1+x)\geqslant 0$

$2\leqslant 4$ (les bornes sont dans le bon sens)

Donc $A\geqslant 0$.

$\mathbf{B}=\int_0^{\frac{1}{2}}-e^{x+3}\,\mathrm{d}x$

$\forall x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ $-e^{x+3}\leqslant 0$

$0\leqslant\frac{1}{2}$

Donc $B\leqslant 0$.

$\mathbf{C}=\int_{-2}^{-6}\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$

Les bornes ne sont pas dans le bon sens ; on transforme l'écriture.

$C=-\int_{-6}^{-2}\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$

$\forall x\in[-6\,;-2]$ $\sqrt{2-x}\geqslant 0$

$-6\leqslant -2$

Donc $C\leqslant 0$.

$\mathbf{D}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x-3}$

$\forall x\in[0\,;1]$

$\frac{1}{x-3}\leqslant 0$

$0\leqslant 1$

Donc $D\leqslant 0$.

Les inégalités finales sont en fait toutes strictes mais nous n'avons pas le moyen de le justifier en Terminale.

On a $2<4$ donc, a fortiori, $2\leqslant 4$ (la propriété dit bien que $a\leqslant b$).

14 **Utilisation des propriétés des intégrales**

$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ ; $\int_0^5\left(2f(x)-5g(x)\right)\mathrm{d}x=-13$ ; $\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x=3$

**Solution détaillée :**

$f$ est continue sur l'intervalle [0 ; 5].
D'après la relation de Chasles,

$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=-3+4=1$

$f$ et $g$ sont continues sur l'intervalle [0 ; 5].

Par linéarité de l'intégrale,

$\int_0^5\left(2f(x)-5g(x)\right)\mathrm{d}x=2\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x-5\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x=-13$

$\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-(-3)=3$.

15 **Utilisation des propriétés des intégrales**

$\int_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x=6$

**Solution détaillée :**

**Calcul de** $\int_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$\int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^7 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_7^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^7 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x=5-(-1)=6$

**Mieux vaut présenter les calculs en colonne.**

On peut aussi écrire : $\int_{-2}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{4}^{7} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^{7} f(x)\ \mathrm{d}x$ donc

$$\int_{-2}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x = 5-(-1)$$

$$= 6$$

## $\boxed{16}$ Encadrement d'une intégrale

$\frac{1}{3} \leqslant \mathrm{I} \leqslant \frac{1}{2}$ (on utilise la « croissance » de l'intégrale)

**Solution détaillée :**

$f$ : fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que $\forall x \in [0\,;1] \quad x^2 \leqslant f(x) \leqslant x$

On désire obtenir un encadrement de $\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Considérons les fonctions $g$ et $h$ définies par $g(x) = x^2$ et $h(x) = x$.

$\forall x \in [0\,;1] \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

Donc par croissance de l'intégrale, on a : $\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x$ (car les bornes sont dans le « bon » sens).

On peut ensuite calculer les intégrales de $g$ et $h$ sur $[0\,;1]$.

$$\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

On peut alors écrire : $\frac{1}{3} \leqslant \mathrm{I} \leqslant \frac{1}{2}$.

On ne peut pas calculer I car on ne connaît pas l'expression de *f*.

## $\boxed{17}$ Calculs astucieux d'intégrales

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$ ; $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$

I et J ne sont pas calculables simplement de manière directe.

1°) **Justifions l'existence de I et J.**

Les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = \cos^2 x$ et $g(x) = \sin^2 x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Elles sont donc intégrables sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que I et J existent.

**Autre rédaction possible :**

La fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $g : x \mapsto \sin^2 x$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que I et J existent.

2°)

• **Calculons $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.**

Il faut utiliser les formules :

$\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ (relation fondamentale) et $\boldsymbol{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$ (formule de duplication vue en 1ère).

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = [\ x\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

**On peut aussi utiliser la propriété de l'intégrale d'une fonction constante sur un intervalle [*a*, *b*] : constante × différence des bornes.**

$\boldsymbol{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$$\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ 2x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin(2\times 0)}{2} = \frac{\sin\ \pi}{2} - \frac{\sin\ 0}{2} = 0$$

Mieux vaut présenter ces deux calculs en colonne.

**• Déduisons-en les valeurs de I et J.**

I et J vérifient le système (I) $\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi}{2} \\ I-J=0 \end{cases}$.

(I) donne $\begin{cases} 2I=\dfrac{\pi}{2} \\ 2J=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} I=\dfrac{\pi}{4} \\ J=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

On en déduit que $I=\dfrac{\pi}{4}$ et $J=\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{18}$ Tirer les traits de fraction à la règle.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad\qquad$ $g : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$

1°) **Calculons $I_1=\int_0^1 f(x)\,dx$.**

On calcule une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

On effectue une réécriture $\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}$.

On peut donc utiliser une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

Ainsi, une primitive de la fonction $f$ est la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|=\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}$.

On enlève les barres de valeur absolue car l'expression $x^2+1$ est strictement positive.

$$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\right]_0^1=\frac{\ln\left(1^2+1\right)}{2}-\frac{\ln 1}{2}=\frac{\ln 2}{2}$$

2°) **$I_2=\int_0^1 g(x)\,dx$**

**Calculons $I_1+I_2$.**

$I_1+I_2=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx$ (linéarité de l'intégrale)

Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=\dfrac{x\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\cancel{x^2+1}}=x$

Donc $I_1+I_2=\int_0^1 x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$.

**Déduisons-en $I_2$.**

$$\begin{aligned} I_2&=\frac{1}{2}-I_1\\ &=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\\ &=\frac{1-\ln 2}{2}\end{aligned}$$

On peut vérifier les résultats grâce à la calculatrice (valeurs approchées).

$\boxed{19}$

$f : x \mapsto |x-3|$

$I=\int_1^4 f(x)\,dx$

1°) **Justifions l'existence de I.**

La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1;4]$ (composée de la fonction $x \mapsto x-3$ suivie de la fonction $x \mapsto |x|$).

Par suite, $f$ est intégrable sur l'intervalle $[1;4]$.

2°) **Exprimons $f(x)$ en fonction de $x$ sans barres de valeur absolue.**

**Rappel sur la valeur absolue :**

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si } X\geqslant 0 \\ -X & \text{si } X\leqslant 0\end{cases}$$

Pour exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue, on regarde le signe de $x-3$.

$$\begin{cases} f(x)=x-3 & \text{si } x\geqslant 3 \\ f(x)=-x+3 & \text{si } x\leqslant 3\end{cases}$$

On peut aussi rédiger de la manière suivante :

- $\forall x\in[1;3]\quad f(x)=-(x-3)=3-x$
- $\forall x\in[3;4]\quad f(x)=x-3$

**Remarque (due à Guillaume Awoukou, élève de TS1 le 13-2-2019)**

On pourrait aussi exprimer la valeur absolue de $x-3$ en $\sqrt{x^2-6x+9}$.
Cependant cette dernière expression n'aurait pas d'intérêt pour la question suivante de l'exercice.

3°) **Calculons I.**

On ne peut pas calculer directement l'intégrale de *f* sur l'intervalle $[1\,;4]$.
On calcule l'intégrale en deux parties.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 (-x+3)\ \mathrm{d}x + \int_3^4 (x-3)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^4 \\
&= \left(-\frac{3^2}{2}+9\right)-\left(-\frac{1^2}{2}+3\right)+\left(\frac{4^2}{2}-12\right)-\left(\frac{3^2}{2}-9\right) \\
&= \left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{1}{2}+3\right)+\left(\frac{16}{2}-12\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right) \\
&= \frac{9}{2}-\frac{5}{2}-4+\frac{9}{2} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en utilisant l'expression de départ de *f* (on n'est pas obligé de couper en deux l'intégrale).
On utilise la commande de la calculatrice qui permet de calculer la valeur absolue d'un nombre.
La calculatrice donnera seulement un résultat approché.

Les exercices $\boxed{20}$ à $\boxed{27}$ portent sur la formule d'intégration par parties dont la formule est rappelée ci-dessous :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

## $\boxed{20}$ Calcul de $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} x \sin x\ \mathrm{d}x$

On procède en effectuant une intégration par parties car on ne peut pas trouver une primitive directement.
Le « bon » choix pour cette intégration par parties est : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$.

On a alors $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$.

*u* et *v* sont définies et dérivables sur [0 ; π].
$u'$ et $v'$ sont continues sur [0 ; π].

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{\pi} x \sin x\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} u'(x)\ v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \big[-\cos x \times x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\ \times 1\ \mathrm{d}x \\
&= (-\cos\pi\times\pi)-(-\cos 0\times 0)+\int_0^{\pi}\cos x\ \mathrm{d}x \\
&= -(-1)\times\pi+\big[\sin x\big]_0^{\pi} \\
&= \pi+\sin\pi-\sin 0 \\
&= \pi+0-0 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Rappels : $\cos\pi=-1$ ; $\sin\pi=0$

**Version plus courte :**

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi} x\sin x\ \mathrm{d}x=\big[-x\cos x\big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\ \mathrm{d}x=\big[-x\cos x\big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\ \mathrm{d}x=-\pi\cos\pi+\big[\sin x\big]_0^{\pi}=\pi$$

## $\boxed{21}$ Calcul de $\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$

On pose $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=x$.
On a alors $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=1$.

On applique la formule d'IPP.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \big[x\mathrm{e}^x\big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= 1\times\mathrm{e}^1-0\times\mathrm{e}^0-\int_0^1\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}-\big[\mathrm{e}^x\big]_0^1 \\
&= \mathrm{e}-\left(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\right) \\
&= \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

**Version plus courte :**

$$\mathrm{I}=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\big[x\mathrm{e}^x\big]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}-\int_0^1\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}-\big[\mathrm{e}^x\big]_0^1=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$$

$\mathbf{I=1}$

**$\boxed{22}$ Calcul de $\mathrm{I}=\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$**

On pose $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln x$.

On a alors $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.

$$\mathrm{I}=\left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\ln 2-0-\int_1^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\ln 2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$
$$=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

**$\boxed{23}$ Calcul de $\mathrm{I}=\int_1^2 \ln x\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$**

On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On a alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=2\sqrt{x}$.

$$\mathrm{I}=\left[\ln x\times 2\sqrt{x}\,\right]_1^2-\int_1^2\frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[\ln x\times 2\sqrt{x}\,\right]_1^2-\int_1^2\frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\quad\left(\text{car }\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\ln 2-\ln 1\times 2\sqrt{1}-\left[\,4\sqrt{x}\,\right]_1^2$$
$$=2\sqrt{2}\ln 2-4\sqrt{2}+4$$

On utilise $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$ pour tout réel $x>0$.

**$\boxed{24}$ Calcul de $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\times\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$**

$\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$ (observer que : $\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}-\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2-\ln 2=-\dfrac{\ln 2}{2}$)

**Solution :**

$u(x)=x\quad v'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$u'(x)=1\quad v(x)=\tan x$

$$\mathrm{I}=\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{4}-0-\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\qquad\left(\tan 0=0\ ;\ \tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0$$
$$=\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}-\ln 2$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln 2$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

Une primitive de la fonction tangente est la fonction $x\mapsto-\ln|\cos x|$ sur tous les intervalles où elle est définie.

**$\boxed{25}$ Calcul de $\mathrm{I}=\int_0^1 x\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$**

La formule d'IPP fait apparaître l'intégrale suivante dont le détail du calcul est donné ci-dessous (la démarche consiste à écrire la racine carrée à l'aide d'un exposant fractionnaire : on écrit $\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$).

Une primitive de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+1}$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$.

On applique la règle de primitive d'une fonction de la forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x)=x+1$.

$$\int_0^1\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$I=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

**Solution détaillée :**

On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

On a alors $u'(x)=1$ et $v(x)=2\sqrt{x+1}$.

$$\begin{aligned}
I&=\left[\ x\times 2\sqrt{x+1}\ \right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x\\
&=2\sqrt{2}-2\int_0^1\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x\\
&=2\sqrt{2}-2\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x\\
&=2\sqrt{2}-2\left[\ \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1\\
&=2\sqrt{2}-2\times\frac{2}{3}\left[\ (x+1)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1\\
&=2\sqrt{2}-2\times\frac{2}{3}\left[\ (x+1)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1\\
&=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left[\ (x+1)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1\\
&=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)\\
&=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\\
&=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

## $\boxed{26}$ Calcul de $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\times\cos x\ \mathrm{d}x$

On effectue une double IPP parce qu'avec une seule IPP on retombe sur une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

On pose $u_1'(x)=\cos x$ et $v_1(x)=x^2$

$u_1(x)=\sin x$ et $v_1'(x)=2x$

$$\begin{aligned}
I&=\left[\sin x\times x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times 2x\ \mathrm{d}x\\
&=\sin\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\sin 0\times 0^2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times x\ \mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On calcule ensuite $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\ \mathrm{d}x$.

On pose : $u_2'(x)=\sin x$ et $v_2(x)=x$.

On a alors $u_2(x)=-\cos x$ et $v_2'(x)=1$.

$$\begin{aligned}
J&=\left[-\cos x\times x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\ \times 1\ \mathrm{d}x\\
&=\left(-\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos 0\times 0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ \mathrm{d}x\\
&=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\\
&=1
\end{aligned}$$

On reprend alors le calcul de I :

$$\begin{aligned}
I&=\frac{\pi^2}{4}-2J\\
&=\frac{\pi^2}{4}-2
\end{aligned}$$

$$I=\frac{\pi^2}{4}-2$$

## $\boxed{27}$

**Calcul de $I=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$**

On effectue une première IPP ; on trouve alors : $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1-\int_0^1 2x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}-2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.

Grâce à une deuxième IPP, que l'on effectue à part, on obtient : $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=1$. Finalement, on trouve $I=\mathrm{e}-2$.

**Solution détaillée :**

On pose $u_1(x)=x^2$ et $v_1'(x)=\mathrm{e}^x$

$u_1'(x)=2x$ et $v_1(x)=\mathrm{e}^x$

D'après la formule d'IPP, on a :

$$\begin{aligned}I &= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx \\ &= e - 2\int_0^1 x e^x \, dx\end{aligned}$$

On calcule $J = \int_0^1 x e^x \, dx$.

On pose $u_2'(x) = e^x$ et $v_2(x) = x$.
On a alors $u_2(x) = e^x$ et $v_2'(x) = 1$.

On applique la formule d'IPP.

$$\begin{aligned}J &= \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= 1 \times e^1 - 0 \times e^0 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= e - \left[e^x\right]_0^1 \\ &= e - \left(e^1 - e^0\right) \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

On reprend le calcul de I.

$$\begin{aligned}I &= e - 2J \\ &= e - 2\end{aligned}$$

**28**

**$f : x \mapsto \sin x$**

**Calculons la valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; \pi]$.**

Rappel de la définition de la valeur moyenne d'une fonction :

> La valeur moyenne d'une fonction $f$ continue sur $[a ; b]$ $(a < b)$ est donnée par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx$.

Par définition, la valeur moyenne $\mu$ de $f$ sur $[0 ; \pi]$ est égale à $\mu = \dfrac{1}{\pi - 0}\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, dx$.

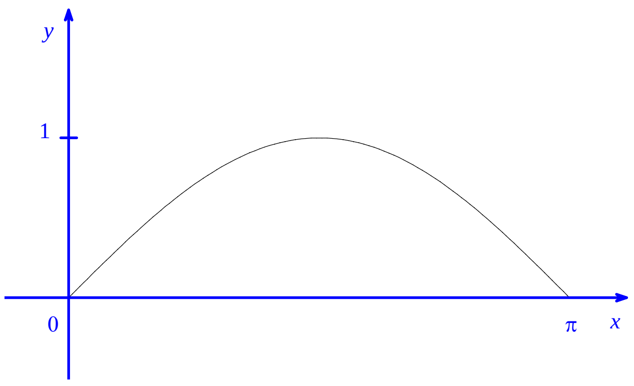
$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-(-1) + 1\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}$$

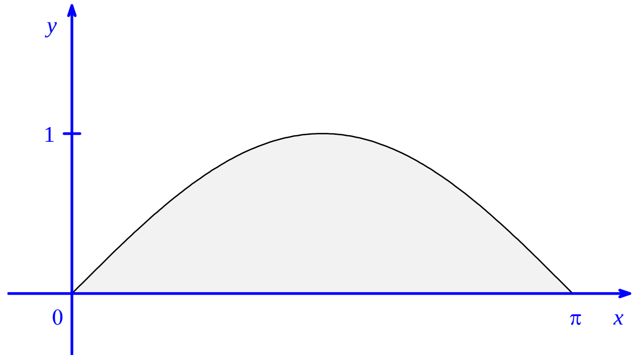
On constate que le résultat est bien compris entre 0 (minimum de $f$) et 1 (maximum de $f$) donc est conforme à l'inégalité de la moyenne.
La fonction $f$ est positive et continue sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

> **2 questions supplémentaires intéressantes :**
>
> → Interpréter la valeur de $\mu$ géométriquement ;
>
> → Illustrer graphiquement la valeur de $\mu$.
>
> Il est intéressant de donner une interprétation « concrète » de cette valeur moyenne dans la situation étudiée ici.
> Il s'agit de la deuxième dimension d'un rectangle …

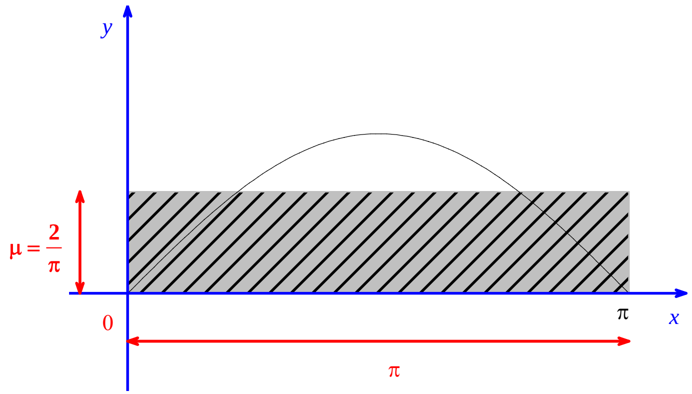
On représente graphiquement la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.




L'aire sous la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ est égale à 2.




On trace le rectangle qui a la même aire. Son côté vertical a pour longueur $\dfrac{2}{\pi}$.




$\boxed{29}$

Calculons $\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^x \ln t \; dt$ $(x>0)$ à l'aide d'une IPP.

On pose $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$.

$u(t)=t$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t}$.

$$\mathrm{I}=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=x\ln x-\int_1^x 1\,\mathrm{d}t$$

$$=x\ln x-(x-1)$$

ou

$$\mathrm{I}=x\ln x-\left[\,t\,\right]_1^x$$

$$\mathrm{I}=x\ln x-(x-1)$$

$$\mathbf{I}=x\ln x-x+1$$

**Autre méthode :**

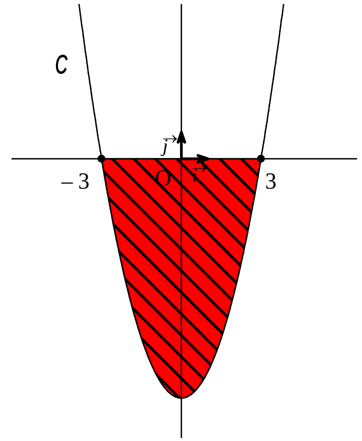
On peut aussi utiliser le résultat d'un exercice fait dans le chapitre sur les primitives donnant une primitive de la fonction logarithme népérien.
On a vu dans le chapitre des primitives que la fonction : $x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

$\boxed{30}$

$f : x\mapsto x^2-9$

1°) Traçons la courbe représentative $\mathcal{C}$ de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

$\mathcal{C}$ est l'image de la courbe représentative de la fonction « carré » par la translation de vecteur $-9\vec{j}$.




2°) **Étudions le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.**

Le mieux est de faire un tableau de signes.

On utilise la règle du signe d'un polynôme du second degré ($x^2-9=(x+3)(x-3)$).

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3°) **Calculons l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.**

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et $\forall x \in [-3\,;3]$ $\quad f(x) \leqslant 0$ donc l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à

$$\mathcal{A} = -\int_{-3}^{3} \left(x^2-9\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-3}^{3} \left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$
$$= (27-9) - (-27+9)$$
$$= 18+18$$
$$= 36$$

**L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 36 u. a..**

**N.B. :** Le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$.

**Commentaire :**

On pourrait dire que cette aire « équivaut » à l'aire d'un carré de côté 6 (« basé » sur l'intervalle $[-3\,;3]$).
cf. définition et interprétation de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

$\boxed{\textbf{31}}$

$f : x \mapsto x^2$ ; $g : x \mapsto -x^2+4x$

$\mathcal{C}$ : $y = x^2$ $\quad \mathcal{C}'$ : $y = -x^2+4x$

1°) Tracé de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des paraboles.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction carré.

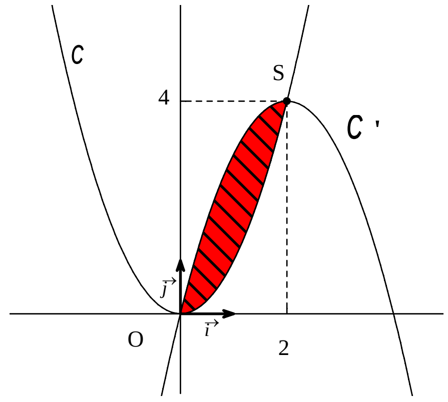
$\mathcal{C}'$ est une parabole de sommet $S(2\,;4)$ tournée vers le bas ; la parabole $\mathcal{C}'$ passe par le point O.
Pour le tracé de $\mathcal{C}'$, on peut faire un petit tableau de valeurs.

**Rappel :**

La courbe d'équation $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ est une parabole.

Son sommet S a pour abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a}$.

$y_S = a{x_S}^2 + bx_S + c$




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 |

On place les points du tableau de valeurs.
On vérifie le tracé à l'aide de la calculatrice.

2°) Étudions algébriquement les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Méthode : On calcule la différence entre $f(x)-g(x)$ que l'on factorise pout faire le tableau de signes.

On étudie le signe de $f(x)-g(x) = 2x^2-4x = 2x(x-2)$.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)-g(x)$ * | | + | 0 | – | 0 | + | |

*On applique la règle du signe d'un polynôme du second degré.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}'$ sur $]0\,;2[$.
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécantes aux points d'abscisses 0 et 2.

On retrouve ainsi par le calcul la position relative que l'on observe sur le graphique.

3°) Calculons l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle [0 ; 2] donc l'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left[g(x) - f(x)\right] \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= 2 \times 4 - \frac{2}{3} \times 8$$
$$= \frac{24}{3} - \frac{16}{3}$$
$$= \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

On vérifie la valeur à l'aide de la calculatrice.

| Le fait que les fonctions soient positives ou négatives ne change rien. |
|---|

Or le repère est orthonormé et l'unité graphique est le centimètre donc l'unité d'aire est le $\text{cm}^2$.

Unité du repère à voir :
Comme l'unité de longueur est 1 cm sur chaque axe, $1 \text{ u. a.} = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$.

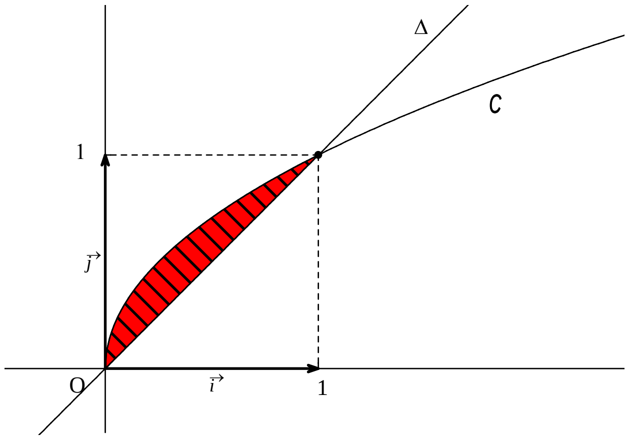
On peut donc écrire : $\mathcal{A} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$.

**N.B.** Le domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$ est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$.

$\boxed{32}$

$\mathcal{C} : y = \sqrt{x}$
$\Delta : y = x$

1°) Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\Delta$.




2°) Étudions par le calcul la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) - x = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)$

On étudie le signe de la différence.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\sqrt{x}$ | 0 | + | | + | |
| Signe de $1 - \sqrt{x}$ | | + | 0 | – | |
| Signe de $f(x) - x$ | 0 | + | 0 | – | |

On peut aussi appliquer directement la règle de comparaison d'un nombre positif ou nul et de sa racine carrée (règle vue en 2e ou en 1ère) :

- Si $0 < x < 1$, alors $x < \sqrt{x}$.
- Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\Delta$ sur $\left]0\,;1\right[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\Delta$ sur $\left]1\,;+\infty\right[$.
- $\mathcal{C}$ et $\Delta$ sont sécantes aux points d'abscisses 0 et 1.

3°) **Calculons l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\Delta$.**

Le domaine compris entre $\mathcal{C}$ et $\Delta$ est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \end{cases}$.

La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\Delta$ sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ donc l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et de $\Delta$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6} \text{ u. a.}$$

L'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et $\Delta$ est égale à $\frac{1}{6}$ u. a..

Une primitive de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (on écrit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$).

Or 1 u.a. $= (4 \text{ cm}) \times (4 \text{ cm}) = 16 \text{ cm}^2$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{8}{3} \text{ cm}^2}$.

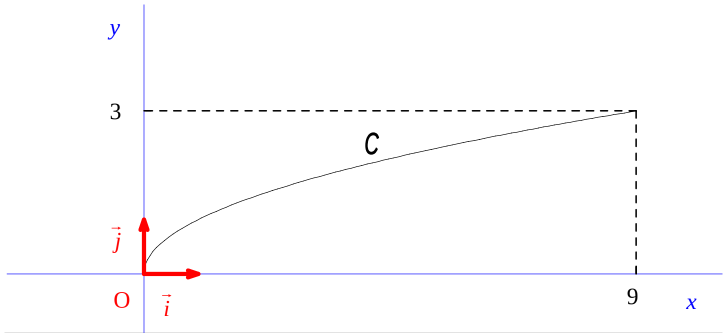
**33**

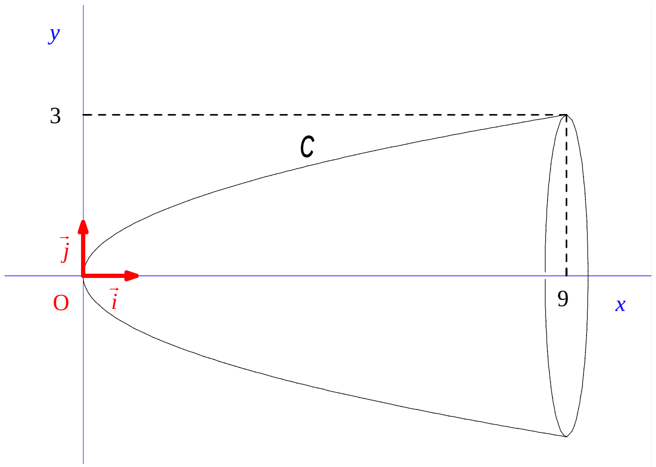
$f : x \mapsto \sqrt{x}$

La courbe $\mathcal{C}$ va engendrer par rotation autour de l'axe des abscisses une surface appelée paraboloïde de révolution.
$\mathcal{C}$ est une génératrice de cette surface.

Faire un graphique.

On trace avec soin la courbe $\mathcal{C}$ qui passe par les points de coordonnées $(1;1)$, $(4;2)$, $(9;3)$. C'est une portion de parabole.




$\mathcal{C}$ est une demi-parabole (d'axe (O$x$)). La surface engendrée est un paraboloïde de révolution.
On cherche le volume du solide limité par le paraboloïde de révolution.

On applique la formule donnant le volume du solide engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe des abscisses (« formule des disques »).

Le volume du solide est donné par $V = \pi \times \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \, dx$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^9 \left[f(x)\right]^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^9 x \, dx \\
&= \pi \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9 \\
&= \frac{81\pi}{2} \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

**34**

Le but de cet exercice est d'étudier une fonction définie par une intégrale (dont on ne connaît pas une expression explicite).

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) \, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

Repasser la lettre $x$ en rouge.
Attention aux variables (il faut réfléchir à chaque étape).
On ne cherche pas à calculer $f(x)$ en fonction de $x$.
Dans tout l'exercice, on ne connaît pas une expression explicite de $f(x)$.

D'après le cours, $f$ est la primitive de la fonction $t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$ qui s'annule en 0.

1°) **Démontrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.**

On ne cherche pas à calculer $f(x)$ en fonction de $x$.

On pose $u(t)=\ln(1+t^2)$.

$u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc d'après le cours (« théorème fondamental » vu dans le paragraphe **IX** du cours), $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=u(x)$ soit $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\ln(1+x^2)$.

3°)

Attention au changement de notations par rapport à l'énoncé qui va suivre :

On applique le théorème sur la dérivée d'une fonction φ définie par $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f$ est une fonction continue sur un intervalle I.
φ est dérivable sur I et $\forall x\in \mathrm{I} \quad \varphi'(x)=f(x)$.

2°) **Déterminons le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

$\forall x\in\mathbb{R} \quad x^2+1\geqslant 1$ donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)\geqslant 0$.
De plus, $f'$ s'annule en 0 qui est une valeur isolée.

On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

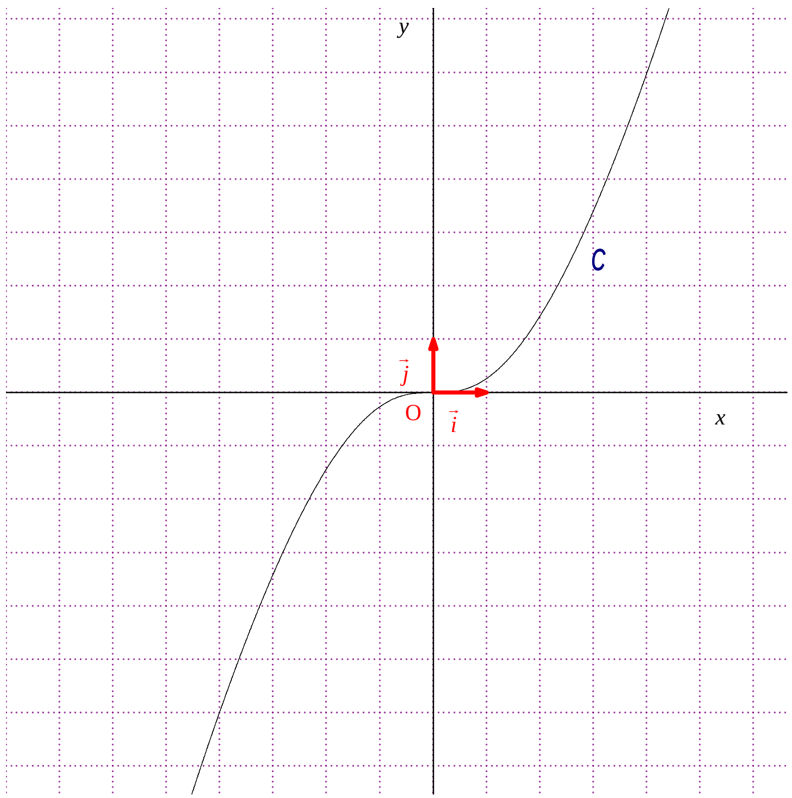
3°) À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-5\,;5]$ avec un pas de 0,5 et tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra le centimètre pour unité graphique).
Vérifier le tracé grâce à la calculatrice.

Attention :
Le tracé est très lent. La calculatrice calcule l'intégrale pour chaque valeur de $x$. Je conseille de faire le tracé sur $[-2\,;2]$.
Il faut bien faire la courbe (ne pas se contenter d'un tracé sur calculatrice).

| $x$ | – 5 | – 4,5 | – 4 | – 3,5 | – 3 | – 2,5 | – 2 | – 1,5 | – 1 | – 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – 9,04 | – 7,46 | – 5,98 | – 4,63 | – 3,41 | – 2,33 | – 1,43 | – 0,73 | – 0,26 | – 0,04 |

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0,04 | 0,26 | 0,73 | 1,43 | 2,33 | 3,41 | 4,63 | 5,98 | 7,46 | 9,04 |

On place les points qui correspondent au tableau de valeurs puis on les joint « à la main ».




On pourrait tracer des tangentes à la courbe sur le graphique.

$\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère car $f(0)=0$ de manière évidente et admet une tangente horizontale en ce point car $f'(0)=0$.
De plus, on peut démontrer que $f$ est impaire. Par suite, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à O.

Sur calculatrice TI 83, on rentre $\text{Y1} = \text{fnInt}\left(\ln\left(1+\text{T}^2\right),\text{T},0,\text{X}\right)$.

L'intégrale se trouve dans $\boxed{\text{math}}$ MATH 9 : fnInt(

Pour les modèles plus récents, on rentrera $\text{Y1} = \displaystyle\int_0^{\text{X}} \ln\left(1+\text{T}^2\right)\,\text{dT}$.

On trace les représentations graphiques en prenant $\text{X} \in [0\,;5]$ et $\text{Y} \in [0\,;1]$.
Le tracé est assez lent.

On peut démontrer grâce à une intégration par parties que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\text{Arctan}\, x$. C'est l'expression explicite de *f* en fonction de *x*.

$\boxed{35}$

1°) On considère la fonction F définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $\text{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\text{e}^t}{1+t}\,\text{d}t$.

On ne cherchera pas à exprimer $\text{F}(x)$ en fonction de *x*.

Justifier que F est bien définie sur $]-1\,;+\infty[$.

**Justifions que F est bien définie sur $]-1\,;+\infty[$.**

Pour tout réel $x > -1$, l'intervalle fermé d'extrémités 0 et *x* est inclus dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\text{e}^t}{1+t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$. Par restriction, elle est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et *x*.

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{e}^t}{1+t}\,\text{d}t$ existe bien pour $x > -1$.

**Démontrer que F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.**

Comme nous l'avons déjà dit, $\varphi$ est continue sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ et $0 \in ]-1\,;+\infty[$.

On pourrait utiliser la lettre *u* à la place de $\varphi$ comme dans la propriété du cours.

Or $\forall x \in ]-1\,;+\infty[ \quad \text{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\text{d}t$.

Donc d'après le cours, F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et $\forall x \in ]-1\,;+\infty[ \quad \text{F}'(x) = \varphi(x)$ soit

$\forall x \in ]-1\,;+\infty[ \quad \text{F}'(x) = \dfrac{\text{e}^x}{1+x}$.

2°) $\text{G}(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\text{e}^t}{1+t}\,\text{d}t$.

Justifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel *x*, l'intervalle fermé d'extrémités 0 et $x^2$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Cet intervalle est donc inclus dans $]-1\,;+\infty[$.
Or la fonction $\varphi$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$ donc par restriction sur l'intervalle $\left[0\,;x^2\right]$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{x^2} \varphi(t)\,\text{d}t$ existe pour tout réel *x*.

En observant que $\text{G}(x) = \text{F}\left(x^2\right)$, démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{G}(x) = \text{F}\left(x^2\right)$.

G est la composée de la fonction « carré » suivie de F. La fonction « carré » est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction G est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

Il y aurait éventuellement un petit problème d'intervalles dont il faudrait parler.
Nous ne le ferons pas ici.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{G}'(x) = 2x \times \text{F}'\left(x^2\right)$$
$$= 2x \times \frac{\text{e}^{x^2}}{1+x^2}$$
$$= \frac{2x\text{e}^{x^2}}{1+x^2}$$