TS

Exercices sur les représentations paramétriques de droites et de plans

1 Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer un repère de la droite D admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et tracer D sur un graphique.
Tracer D sur l'écran de la calculatrice.

Dans les exercices suivants, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

2 On considère la droite D de repère $\left(\text{A}, \vec{u}\right)$ avec $\text{A}(-3\,;1\,;4)$ et $\vec{u}\left(-1\,;\frac{3}{2}\,;2\right)$.

1°) Donner un système d'équations paramétriques de D.
2°) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de D avec le plan $(x\text{O}y)$.

3 On considère la droite D admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 4+t \\ z = 3-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Donner un repère de D.
2°) Le point $\text{E}(6\,;-1\,;13)$ appartient-il à D ? Le point $\text{F}(2\,;3\,;1)$ appartient-il à D ?

4 On considère les droites D et D' précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$D \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x = -9+\frac{9}{2}t' \\ y = 5+3t' \\ z = 1+3t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

5 On considère la droite D admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5-t \\ y = 1+4t \\ z = -3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que D est parallèle à l'un des plans de coordonnées.
2°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D' parallèle à D passant par le point $\text{A}(-1\,;7\,;0)$.

6 On considère les droites D et D' précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$D \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3-2t' \\ z = 1+t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Démontrer qu'il existe un point M de D et un point M′ de D' tels que le point $\text{I}\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ soit le milieu de [MM′].

7 On considère les droites D et D' précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$D \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x = 3t' \\ y = 1+2t' \\ z = 2-t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Démontrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

8 On considère les droites D et D' précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$D \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x = -1+3t' \\ y = -2+t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Démontrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

9 On considère les points $\text{A}(1\,;1\,;-2)$, $\text{B}(1\,;2\,;-1)$, $\text{C}(3\,;1\,;4)$.

1°) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2°) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).
3°) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P passant par O parallèle à (ABC).

10 On considère le plan P défini par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2+3t+t' \\ y = 1+2t \\ z = 3t+4t' \end{cases}$ $\left((t\,;t') \in \mathbb{R}^2\right)$.

Déterminer un repère de P.

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Pour tout réel m, on note $\mathcal{C}_m$ la « courbe » d'équation $x^2+y^2-2mx-2(m-1)y=2$.
Réaliser un graphique sur Geogebra (créer un curseur pour le paramètre m).
Faire varier m en faisant afficher les courbes (avec Trace activée).

1°) Démontrer que $\mathcal{C}_m$ est un cercle pour tout réel m. Préciser le rayon et les coordonnées du centre Ω_m.

2°) Quel est l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

3°) En observant que l'équation qui définit $\mathcal{C}_m$ peut s'écrire $x^2+y^2+2y-2-2m(x+y)=0$, démontrer que tous les cercles $\mathcal{C}_m$ passent par deux points fixes I et J dont on donnera les coordonnées.

Corrigé

Le vendredi 18 février 2022

Résolution d'un système avec la calculatrice Numworks :
→ Aller sur la calculatrice dans « équations ».
→ Ajouter une équation (rentrer l'équation) (autant qu'on veut).
→ Sélectionner résoudre l'équation.

1

$D\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Déterminons un repère de *D*.

Repère d'une droite :

On appelle **repère d'une droite** dans le plan un couple formé d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.

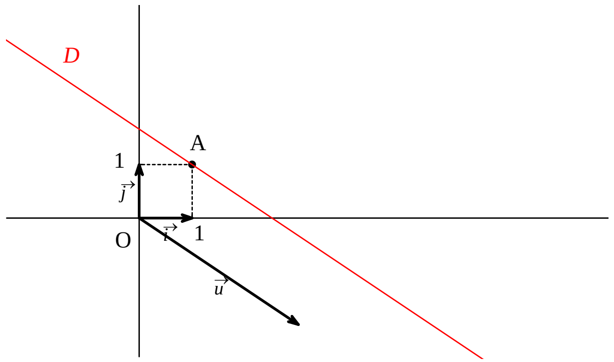
Une droite admet une infinité de repères.

Conventionnellement, un repère est désigné en écrivant d'abord le point puis le vecteur directeur.

D est la droite de repère $\left(\mathrm{A},\vec{u}\right)$ avec $\mathrm{A}(1\,;1)$ et $\vec{u}(3\,;-2)$.

Autrement dit, D est la droite passant par $\mathrm{A}(1\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-2)$.

Traçons la droite *D*.



On peut aussi un autre point de la droite D distinct de A.

Le 25-3-2015

Vianney Dardonville : Déterminer deux points de la droite.

Le vendredi 17 mars 2017

Question de Juliette Bongiovanni : Pourquoi représente-t-on le vecteur $\vec{u}$ à partir de l'origine O ?

Réponse : On peut représenter le vecteur $\vec{u}$ à partir de n'importe quel point.

On vérifie sur la calculatrice graphique.

Autres façons :

• On prend deux points de la droite en donnant deux valeurs distinctes au paramètre t.

• Repasser par une équation cartésienne (possible mais lourd).

2

D : droite de repère $\left(\mathrm{A},\vec{u}\right)$ avec $\mathrm{A}(-3\,;1\,;4)$ et $\vec{u}\left(-1\,;\dfrac{3}{2}\,;2\right)$

1°) **Donnons un système d'équations paramétriques de *D*.**

On applique la formule du cours sur les équations paramétriques de droites.

On choisit soi-même la lettre pour désigner le paramètre (pas de lettre imposée).
Ce paramètre est souvent noté t ou λ.

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x=-3-t \\ y=1+\dfrac{3}{2}t \\ z=4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

N.B. : Il n'y a pas d'équations cartésiennes de droites dans l'espace.

On pourrait aussi utiliser les matrices pour écrire ce système d'équations paramétriques.

2°) **Calculons les coordonnées du point d'intersection I de *D* avec le plan (*x*O*y*).**

Le plan $(x\mathrm{O}y)$ a pour équation $z=0$ donc $z_{\mathrm{I}}=0$.

On utilise ensuite le système d'équations paramétriques de la droite D.
Le paramètre t du point I sur la droite D vérifie l'équation $4+2t=0$.
Donc $t=-2$.
Grâce au système d'équations paramétriques de D, on obtient :
$x_{\mathrm{I}}=-3-(-2)=-1$ et $y_{\mathrm{I}}=1+\dfrac{3}{2}\times(-2)=1-3=-2$.
D'où **I(– 1 ; – 2 ; 0)**.

$\boxed{3}$

$$D\ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1°) **Donnons un repère de *D*.**

Repère d'une droite :

On appelle **repère d'une droite** (dans le plan ou dans l'espace) un couple formé d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.

Une droite admet une infinité de repères.

Conventionnellement, un repère est désigné en écrivant d'abord le point puis le vecteur directeur.

Lorsque l'on demande un repère d'une droite, on doit donner un point et un vecteur directeur de cette droite.

Un repère de la droite *D* est $\left(\text{A}, \vec{u}\right)$ avec $\text{A}(1\,;4\,;3)$ et $\vec{u}\,(-1\,;1\,;-2)$.

2°) **Déterminons si les points E(6 ; – 1 ; 13) et F(2 ; 3 ; 1) appartiennent à *D*.**

1[ère] méthode :

Pour savoir si le point E appartient ou non à *D*, on cherche s'il existe un réel *t* tel que

$$\begin{cases} x_{\text{E}} = 1 - t \\ y_{\text{E}} = 4 + t \\ z_{\text{E}} = 3 - 2t \end{cases}.$$

Ce système équivaut à $\begin{cases} 6 = 1 - t \\ -1 = 4 + t \\ 13 = 3 - 2t \end{cases}$, qui donne $\begin{cases} t = -5 \\ t = -5 \\ t = -5 \end{cases}$.

Ce système est pléthorique (du mot pléthore = excès) en équations par rapport au nombre d'inconnues.

Méthode :

Prendre chaque équation et résoudre.
Si la valeur de *t* est la même pour les trois équations, alors le système admet une unique solution et l'on pourra dire que le point appartient bien à la droite *D*.
Si les valeurs de *t* sont différentes pour les trois équations, alors on pourra dire que le système n'admet pas de solution.

On peut évidemment résoudre le système avec la calculatrice.

Ici, on obtient la même valeur pour les trois équations : $t = -5$.

Le système admet bien un unique nombre solution donc **E ∈ *D*** $(t = -5)$.

Pour E, on obtient $t = -5$.
Que signifie le – 5 ?

On a $\overrightarrow{\text{AE}} = -5\vec{u}$ (référence à $\overrightarrow{\text{AM}} = -5\vec{u}$).
Le – 5 est un coefficient de colinéarité.

2[e] méthode :

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AE}}$ et l'on démontre qu'il est colinéaire à $\vec{u}$.

De même, pour le point F, on cherche s'il existe un réel *t* solution du système $\begin{cases} 2 = 1 - t \\ 3 = 4 + t \\ 1 = 3 - 2t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$.

On remarque qu'il n'existe pas de nombre solution donc **F ∉ *D***.

Attention pour F :

Le système n'a pas de solution. Il ne faut surtout pas dire que a 2 solutions.

Il n'y a pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace.
On peut définir une droite par un système de deux équations cartésiennes de plans (selon la propriété « deux plans sécants de l'espace se coupent selon une droite ») ou par un système d'équations paramétriques.

$\boxed{4}$

$D \,//\, D'$ (déterminer un vecteur directeur de chacune des deux droites et démontrer qu'ils sont colinéaires)

Solution détaillée :

$$D\ \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D'\ \begin{cases} x = -9 + \dfrac{9}{2}t' \\ y = 5 + 3t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

• Attention : $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$
• On pourrait utiliser le même paramètre *t* mais on aurait un problème dans le raisonnement (problème d'intersection de droites).

On peut dire que le vecteur $\vec{u}\,(3\,;2\,;2)$ est un vecteur directeur de *D* et que le vecteur $\vec{v}\left(\frac{9}{2}\,;3\,;3\right)$ est un vecteur directeur de D'.

Attention :
On ne peut pas parler de vecteur normal à une droite dans l'espace.
Une droite dans l'espace pourrait admettre une infinité de vecteurs normaux au sens où il y a une infinité de vecteurs orthogonaux.
Mais ces vecteurs ne sont pas tous colinéaires entre eux (dans l'espace).
On ne parle donc pas de vecteur normal à une droite de l'espace.

On observe que $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
Par suite, $D \,//\, D'$.
On peut se demander si les deux droites sont strictement parallèles ou confondues.

Il y a pour cela deux méthodes pour répondre à la question.

La méthode la plus satisfaisante consiste à déterminer un point de *D* et à voir s'il appartient à D'.
On voit alors si *D* et D' sont confondues ou strictement parallèles.

1ère méthode :

Déterminer un point de *D* et voir s'il appartient à D'.

Le point $\mathrm{O}(0\,;0\,;0)$ obtenu pour $t=0$ appartient à *D*.

On peut démontrer que $\mathrm{O} \notin D'$.

On voit qu'il n'appartient pas à D' (car on n'obtiendrait pas la même valeur de t' en résolvant le système formé par chacune des équations paramétriques égale à 0).

Donc les droites ***D* et *D'* sont strictement parallèles**.

2e méthode :

Étudier l'intersection de *D* et de *D′*.
On trouve une intersection vide (ensemble vide). En conséquence de quoi, les droites *D* et D' sont strictement parallèles (sinon on trouverait $D \cap D' = D = D'$).

$\boxed{5}$

$$D\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1°) **Démontrons que *D* est parallèle à l'un des plans de coordonnées.**

1ère méthode :

D'après la troisième équation du système d'équations paramétriques, on remarque que la droite *D* est incluse dans le plan *P* d'équation $z = -3$.

D'autre part, *P* est parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$ (en effet, un plan qui admet une équation de la forme $z = a$ où *a* est un réel fixé est parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$). Or si deux plans sont parallèles, alors toute droite incluse dans l'un est parallèle à l'autre. Donc $D \,//\, (x\mathrm{O}y)$.

2e méthode :

Le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;4\,;0)$ est un vecteur directeur de *D*.
On a $\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ $[\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}\,]$. On en déduit que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}$ sont coplanaires.
Or $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère du plan $(x\mathrm{O}y)$.
On en déduit que $D \,//\, (x\mathrm{O}y)$ [il s'agit d'une petite propriété du cours].

2°) **Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite *D'* parallèle à *D* passant par le point A(– 1 ; 7 ; 0).**

Le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;4\,;0)$ est un vecteur directeur de *D*.
Or $D \,//\, D'$ donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D'.

Si deux droites sont parallèles, alors tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

Donc ***D'* admet le système** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 7 + 4t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **pour système d'équations paramétriques.**

Remarque :

Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D'.
Par exemple, le vecteur $2\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D'. Avec ce vecteur, la droite D' admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 8t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
Toute droite de l'espace admet une infinité de systèmes d'équations paramétriques.

6

On résout le problème à l'aide d'un système.
On obtient $t=-2$ et $t'=-1$ ce qui donne $\text{M}\left(-1\,;-4\,;3\right)$ et $\text{M}'\left(-2\,;5\,;0\right)$.

Solution détaillée :

$$D\begin{cases}x=1+t\\ y=2t\\ z=1-t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R}) \qquad\qquad D'\begin{cases}x=2t'\\ y=3-2t'\\ z=1+t'\end{cases}\quad (t'\in\mathbb{R})$$

Démontrons qu'il existe un point M de D et un point M′ de D' tels que le point $\text{I}\left(-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$ soit le milieu de [MM′].

Soit M un point de D associé au paramètre t et M′ un point de D' associé au paramètre t'.

$$\text{I milieu de [MM}'] \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x_{\text{M}}+x_{\text{M}'}}{2}=x_{\text{I}}\\ \dfrac{y_{\text{M}}+y_{\text{M}'}}{2}=y_{\text{I}}\\ \dfrac{z_{\text{M}}+z_{\text{M}'}}{2}=z_{\text{I}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{\text{M}}+x_{\text{M}'}=2x_{\text{I}}\\ y_{\text{M}}+y_{\text{M}'}=2y_{\text{I}}\\ z_{\text{M}}+z_{\text{M}'}=2z_{\text{I}}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\dfrac{1+t+2t'}{2}=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2t+3-2t'}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1-t+1+t'}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

On peut évidemment résoudre le système avec la calculatrice.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+t+2t'=-3\\ 2t+3-2t'=1\\ 1-t+1+t'=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t+2t'=-4 & (1)\\ 2t-2t'=-2 & (2)\\ -t+t'=1 & (3)\end{cases}$$

On considère le système formé par les équations (1) et (2) (« sous-système »).

On le résout (méthode au choix) ; on trouve $\begin{cases}t=-2\\ t'=-1\end{cases}$ (par exemple, en additionnant membre à membre (1) et (2)).

On vérifie alors que l'équation (3) est satisfaite.

En fait, l'équation (2) est équivalente à $t-t'=-1$ et l'équation (3) est équivalente à $t-t'=-1$.
Donc les équations (2) et (3) sont équivalentes (identiques), ce qui évite de considérer un sous-système.

On peut éventuellement utiliser la calculatrice pour résoudre le système.

Conclusion :

Pour $t=-2$, on obtient $\begin{cases}x_{\text{M}}=1-2=-1\\ y_{\text{M}}=2\times(-2)=-4\\ z_{\text{M}}=1-(-2)=3\end{cases}$.

Pour $t'=-1$, on obtient $\begin{cases}x_{\text{M}'}=2\times(-1)=-2\\ y_{\text{M}'}=3-2\times(-1)=5\\ z_{\text{M}'}=1-1=0\end{cases}$.

On en déduit que $\text{M}\left(-1\,;-4\,;3\right)$ et $\text{M}'\left(-2\,;5\,;0\right)$.

Autre façon de rédiger :

$$\text{I milieu de [MM}'] \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x_{\text{M}}+x_{\text{M}'}}{2}=x_{\text{I}}\\ \dfrac{y_{\text{M}}+y_{\text{M}'}}{2}=y_{\text{I}}\\ \dfrac{z_{\text{M}}+z_{\text{M}'}}{2}=z_{\text{I}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+t+2t'=-3 & (1)\\ 2t+3-2t'=1 & (2)\\ 1-t+1+t'=3 & (3)\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow t=-4-2t'$ $(1')$

Compte tenu de $(1')$, (2) donne alors $3+2\left(-4-2t'\right)-2t'=1$ soit $t'=-1$.

L'égalité $(1')$ donne alors $t=-2$.

L'égalité (3) est vérifiée pour $t=-2$ et $t'=-1$.

$\boxed{7}$

$$D\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+2t \end{cases} \qquad D'\begin{cases} x=3t' \\ y=1+2t' \quad (t'\in\mathbb{R}) \\ z=2-t' \end{cases}$$

Démontrons que les droites *D* et *D'* ne sont pas coplanaires.

Rappel sur la position relative de deux droites dans l'espace

position relative de deux droites dans l'espace

coplanaires

non coplanaires
intersection vide

sécantes en un point
(intersection = 1 singleton)

parallèles

strictement parallèles
intersection vide

confondues

• Démontrons tout d'abord que D et D' ne sont pas parallèles.

La droite D admet le vecteur $\vec{u}\,(1\,;-1\,;2)$ pour vecteur directeur.
La droite D' admet le vecteur $\vec{u}\,'\,(3\,;2\,;-1)$ pour vecteur directeur.
On observe que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ ne sont pas colinéaires.
Donc D et D' ne sont pas parallèles.

• Démontrons ensuite que D et D' n'ont pas de point commun.

« D et D' ne sont pas sécantes » signifie que « D et D' n'ont pas de point commun ».

Considérons pour cela le système (I) $\begin{cases} 1+t=3t' & (1) \\ 2-t=1+2t' & (2) \\ 3+2t=2-t' & (3) \end{cases}$.

Comment fait-on le système ?

On écrit $\begin{cases} \text{"}x\text{ de }D\text{"}=\text{"}x\text{ de }D'\text{"} \\ \text{"}y\text{ de }D\text{"}=\text{"}y\text{ de }D'\text{"} \\ \text{"}z\text{ de }D\text{"}=\text{"}z\text{ de }D'\text{"} \end{cases}$.
On utilise bien deux paramètres t et t'.
Il ne faudrait pas utiliser le même paramètre pour les deux droites.

On passe à la résolution du système.

On peut éventuellement utiliser la calculatrice pour résoudre le système.

On considère le sous-système formé des équations (1) et (2) [système linéaire de 2 équations à 2 inconnues].

On peut le résoudre par combinaisons (méthode présentée ici) ou par substitution.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3t'=-1 \\ t+2t'=1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \times(-1) \\ \times 1 \end{vmatrix}$$

(on utilise les multiplicateurs placés à droite)

$\downarrow$ pour annuler les t' $\quad$ $\downarrow$ pour annuler les t

On voit que le système a un déterminant non nul donc admet un unique couple solution.

On multiplie la première équation par 2 et la deuxième équation par 3 ce qui donne la valeur de t.

On multiplie la première équation par – 1 et la deuxième équation par 1 ce qui donne la valeur de t'.

Quand on multiplie, on multiplie toute l'égalité (à droite et à gauche).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t=1 \\ 5t'=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{5} \\ t'=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

On reprend l'équation (3) (c'est-à-dire $3+2t=2-t'$).

On doit regarder si les valeurs de t et t' trouvées vérifient cette équation.

On $3+2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{17}{5}$ et $2-\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$

(3) n'est pas vérifiée pour le couple $\left(\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$ donc le système (I) n'admet pas de couple solution.

Par conséquent, $D \cap D' = \varnothing$.

On en déduit que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

> ***Autre façon :***
>
> *On utilise la propriété suivante.*
>
> Soit D une droite de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$.
> Soit D' une droite de repère $\left(\mathrm{A'}, \vec{u'}\right)$.
>
> D et D' sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$, $\vec{u}$, $\vec{u'}$ sont coplanaires.

Une résolution matricielle du système $\begin{cases} t-3t'=-1 \\ t+2t'=1 \end{cases}$ est possible en l'écrivant sous la forme

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{8}}$

$D \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad D' \begin{cases} x=-1+3t' \\ y=-2+t' \\ z=t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

Démontrons que les droites D et D' sont sécantes et déterminons les coordonnées de leur point d'intersection I.

Considérons le système (I) $\begin{cases} 2+2t=-1+3t' & (1) \\ -1+t=-2+t' & (2) \\ 1+t=t' & (3) \end{cases}$ d'inconnue $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues.

> On peut éventuellement utiliser la calculatrice pour résoudre le système.
>
> On nomme les inconnues x et y. On rentre le système $\begin{cases} 2+2x=-1+3y \\ -1+x=-2+y \\ 1+x=y \end{cases}$.

Le 10-12-2022

On résout le système suivant à l'aide de la calculatrice.

$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \\ x=-1+3t' \\ y=-2+t' \\ z=t' \end{cases}$

On remplace t' par une autre lettre, par exemple r (obtenue grâce à la touche alpha).

$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \\ x=-1+3r \\ y=-2+r \\ z=r \end{cases}$

$\begin{cases} t=0 \\ y=-1 \\ z=1 \\ r=1 \\ x=2 \end{cases}$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 3t' - 3 \\ 1 + t = t' \\ 1 + t = t' \end{cases}$$

On peut aussi écrire $t = t' - 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 3t' - 3 & (1') \\ 1 + t = t' & (2') \end{cases}$$ (On a deux fois la même équation ; on enlève donc la troisième équation)

Quand on a deux fois la même équation dans un système, on enlève celle qui ne sert à rien.

On est ramené à un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Il y a donc plusieurs façons de le résoudre.
Méthode matricielle, méthode par substitution, méthode par combinaisons

En général, la méthode par combinaison est à privilégier mais ici, la méthode par substitution marche très bien.
On remplace t' par $1+t$ dans l'équation $(1')$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 3(1+t) - 3 \\ 1 + t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 3 - 3t - 3 \\ 1 + t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t = 0 \\ 1 + t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 1 + t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

On obtient donc un unique couple solution pour le système (I), ce qui permet d'affirmer que les droites D et D' sont sécantes en un point I.

Pour déterminer les coordonnées de I, on remplace t par 0 dans le système d'équations paramétriques de D ou t' par 1 dans le système paramétrique de D'.

$$\mathrm{I} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = 2 + 2 \times 0 = 2 \\ y_{\mathrm{I}} = -1 + 0 = -1 \\ z_{\mathrm{I}} = 1 + 0 = 1 \end{array} \right.$$ (on obtient le même résultat en remplaçant t' par 1 dans le système d'équations paramétriques de D')

$\mathrm{I}(2\,;-1\,;1)$

De manière générale, on a un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues.
Les équations sont (1), (2), (3).
On considère un sous-système formé de 2 équations au choix (par exemple (1) et (2) ou (2) et (3) ou (1) et (3) au choix). On le résout.
Si on trouve un unique couple solution, on doit regarder s'il vérifie l'équation qui a été mise de côté.

Si la réponse est oui, le système formé des trois équations admet un unique couple solution et les droites sont sécantes.
Si la réponse est non, le système formé des trois équations n'admet pas de couple solution et les droites n'ont pas de point d'intersection.

Variante notée le 18-1-2022 : tapée le lundi 21-2-2022

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=-1+3t'-2 \\ t'=-1+t+2 \\ 1+t=t' \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3t'-3 \\ t'=t+1 \\ t'=t+1 \end{cases}$$

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3+3t' \\ -1+t=-2+t' \end{cases}$ (on a multiplié l'équation $(2')$ par 2 et on soustrait l'équation $(1')$)

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=1 \\ t=0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3+3t' \\ 1+t=t' \\ 1+t=t' \end{cases}$$

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3+3t' & (1') \\ 1+t=t' & (2') \end{cases}$ (on a deux fois la même équation ; on enlève donc la troisième équation)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3+3t' \\ -1+t=-2+t' \end{cases}$ (on a multiplié l'équation $(2')$ par 2 et on soustrait l'équation $(1')$)

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=1 \\ t=0 \end{cases}$$

Le couple $(0\,;1)$ vérifie l'équation (3).

On peut aussi commencer par résoudre le système formé par les équations (1) et (2) d'inconnue $(t\,;t')$.

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3+3t' \\ -1+t=-2+t' \end{cases}$ (on a multiplié l'équation (2) par 2 et on soustrait l'équation (1))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t'=1 \\ t=0 \end{cases}$$

Autre méthode :

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t'=-3 & (1') \\ t-t'=-1 & (2') \\ t-t'=-1 & (3') \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t'=-3 \\ t-t'=-1 \end{cases}$ (car les équations $(2')$ et $(3')$ sont identiques)

$\Leftrightarrow \ldots$

Exercice supplémentaire :

Reprendre l'exercice avec les droites $D \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $D' \begin{cases} x=1+3t' \\ y=-2+t' \\ z=t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

(J'ai juste remplacé – 1 par 1 dans la première équation paramétrique de la deuxième droite).

On trouve $t=-2$ et $t'=-1$.

$\mathrm{I}(-2\,;-3\,;-1)$

9

$\mathrm{A}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{B}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{C}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right.$

1°) **Démontrons que les points A, B, C ne sont pas alignés.**

Pour démontrer que 3 points ne sont pas alignés, on utilise les vecteurs et la colinéarité.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 6 \end{array}\right.$

On peut prendre n'importe quels vecteurs mais il est plus naturel de prendre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Il y a deux rédactions possibles.

• On observe qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.
Par suite, les points A, B, C ne sont pas alignés.

• On voit tout de suite sur les coordonnées que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

Autre façon de faire :

On applique le critère de colinéarité de deux vecteurs de l'espace à l'aide de trois déterminants.

On peut calculer un déterminant 2-2 : $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$.

Comme ce déterminant est non nul, on peut affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

Autre façon possible mais maladroite donc à éviter :

On peut déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB). On regarde ensuite si le point C appartient à (AB).

2°) **Déterminons un système d'équations paramétriques du plan (ABC).**

(ABC) a pour repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Donc un système d'équations paramétriques du plan (ABC) s'écrit $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t + 6t' \end{cases} \quad \left((t, t') \in \mathbb{R}^2\right)$.

Remarques :

1. Il y a d'autres repères possibles : $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$, $\left(\mathrm{B}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$…

Cependant, le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ est le plus « naturel » pour le plan (ABC).

2. On peut éliminer les paramètres t et t' dans la dernière équation.

On obtient $z = -2 + y - 1 + 6 \times \dfrac{x-1}{2}$ soit $y - z + 3x - 6 = 0$ ou encore $3x + y - z - 6 = 0$ ce qui donne une équation cartésienne de (ABC).

3°) **Déterminons un système d'équations paramétriques du plan *P* passant par O parallèle à (ABC).**

$P \,//\, (\mathrm{ABC})$ donc P a pour repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On utilise la propriété suivante :
Soit P et P' deux plans parallèles.
Soit $\left(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ un repère de P.
Soit B un point du plan P'.
Alors $\left(\mathrm{B}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère de P'.

Donc un système d'équations paramétriques du plan P s'écrit $\begin{cases} x = 2t' \\ y = t \\ z = t + 6t' \end{cases} \quad \left((t, t') \in \mathbb{R}^2\right)$.

Remarque :

On peut éliminer les paramètres t et t' dans la dernière équation.

On obtient $z = y + 3x$ soit $y + 3x - z = 0$ ou encore $3x + y - z = 0$ ce qui donne une équation cartésienne de P.

10

$$P \begin{cases} x = 2 + 3t + t' \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t + 4t' \end{cases} \quad \left((t, t') \in \mathbb{R}^2\right)$$

Déterminons un repère de *P*.

P a pour repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ avec $\mathrm{A}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{u}\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}$.

On vérifie aisément que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Pour que deux vecteurs soient une base d'un plan, il faut que les deux vecteurs ne soient pas colinéaires.

Autre méthode :

On utilise les matrices.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t'\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$t = 0$, $t' = 0$ — coefficients de t — coefficients de t'

Autre méthode :

On cherche trois points A, B, C de P en donnant des valeurs à t et t'.

Cette méthode est à éviter.

11

$\mathcal{C}_m : x^2+y^2-2mx-2(m-1)y=2$ (m : paramètre réel)

On étudie une famille de courbes dépendant d'un paramètre.
Nous verrons qu'il s'agit en fait d'une famille de cercles.

On pourrait utiliser Geogebra.

1°) Démontrons que $\mathcal{C}_m$ est un cercle pour tout réel m.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M}\in\mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx-2(m-1)y=2$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+y^2-2(m-1)y=2$ [On regroupe dans le 1er membre les termes en x et les termes en y]

$\Leftrightarrow (x-m)^2-m^2+[y-(m-1)]^2-(m-1)^2=2$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré en x et y)

On considère deux trinômes du second degré en x et en y : x^2-2mx et $y^2-2(m-1)y$.
On les met sous forme canonique.

On passe ensuite de l'autre côté tout ce qu'on a retiré afin d'avoir un premier membre de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ avec a, b, k réels.
Pour qu'une telle équation soit une équation de cercle, il faut impérativement que k soit strictement positif.
Dans ce cas, on a un cercle dont le centre aura pour coordonnées $(a\,;b)$ et dont le rayon sera égal à $\sqrt{k}$.

$\Leftrightarrow (x-m)^2+[y-(m-1)]^2=m^2+(m-1)^2+2$ (on n'a pas intérêt à développer pour trouver le signe)

On voit que $\forall m\in\mathbb{R}\quad m^2+(m-1)^2+2>0$.

Pour tout réel m, $\mathcal{C}_m$ est donc un cercle de centre $\Omega_m\,(m\,;m-1)$ et de rayon $r_m=\sqrt{m^2+(m-1)^2+2}$.

On peut dire que $r_m=\sqrt{2m^2-2m+3}$ (en développant sous le radical).
On ne peut pas aller plus loin.

2°) Déterminons l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, $\begin{cases} x_{\Omega_m}=m \\ y_{\Omega_m}=m-1 \end{cases}$.

On reconnaît une représentation paramétrique de droite.

On peut donc dire que l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est la droite D d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t \\ y=t-1 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Il s'agit de la droite de repère $(\text{A},\vec{u})$ avec $\text{A}(0\,;-1)$ [obtenu pour $t=0$] et $\vec{u}\,(1\,;1)$.
On peut aussi dire qu'il s'agit de la droite d'équation $y=x-1$.

3°)

On prend l'équation $x^2+y^2+2y-2-2m(x+y)=0$ qu'on peut aussi écrire $x^2+y^2+2y-2+m[-2(x+y)]=0$.

On a une égalité de la forme $\alpha+\beta m=0$ avec $\alpha=x^2+y^2+2y-2$ et $\beta=-2(x+y)$.

Pour x et y fixé, le premier membre est un polynôme du premier degré en m.

Pour que cette égalité soit vraie pour tout réel m, il faut et il suffit que $\alpha=0$ et $\beta=0$ (principe pour qu'une fonction polynôme soit identiquement nulle : tous ses coefficients doivent être égaux à 0).

On va résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2+2y-2=0 & (1) \\ -2(x+y)=0 & (2) \end{cases}$.

(1) n'est pas une équation linéaire.

(2) est une équation linéaire.

Le système formé par les deux équations n'est donc pas un système linéaire.

La seule méthode pour résoudre le système est la méthode

On prend l'équation (2) [$x+y=0$]/

$(2) \Leftrightarrow y=-x \quad (2')$

On reprend l'équation (1) et on remplace les y par $-x$.

(1) donne alors $x^2+(-x)^2+2(-x)-2=0 \quad (1')$.

$(1') \Leftrightarrow x^2+x^2-2x-2=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$ (simplification par 2 de toute l'équation)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (résolution avec le discriminant

On a deux valeurs de x.

Grâce à la deuxième équation, on peut dire que les couples solutions d système sont $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Donc tous les $\mathcal{C}_m$ passent par les points I$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ et J$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

On parle de faisceau de cercles à points de base.
La droite à laquelle appartiennent tous les centres est la médiatrice de [IJ].