TS1 Spé — Devoir pour le mercredi 20 mars 2013

I.

1°) Déterminer l'ensemble des couples (x ; y) de nombres entiers relatifs, solutions de l'équation
$8x - 5y = 3$ (E).

2°) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p ; q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Démontrer que le couple (p ; q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (mod. 40).

3°) Déterminer le plus petit de ces nombres m supérieurs à 2000.

II.

1°) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k, on a : $2^{3k} \equiv 1$ (mod 7).

2°) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

III.

Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$.
On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer, parmi ces nombres entiers naturels N, ceux qui sont divisibles par 7.

1°) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (mod. 7).

2°) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Corrigé du DM pour le 20-3-2013

I.

1°) **Déterminons l'ensemble des couples $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation $8x - 5y = 3$ (E).**

Le couple (1 ; 1) est une solution particulière de l'équation (E).

(E) $\Leftrightarrow 8x - 5y = 8 \times 1 - 5 \times 1$
$\Leftrightarrow 8(x-1) = 5(y-1)$ (E′)

On en déduit que $8 \mid 5(y-1)$
Or 8 et 5 sont premiers entre eux.
Donc d'après le théorème de Gauss, $8 \mid y - 1$.
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 8k$ soit $y = 1 + 8k$.
On remplace $y - 1$ par $8k$ dans (E′).

On obtient : $8(x-1) = 5 \times 8k$
D'où $x - 1 = 5 \times k$

D'où $x = 1 + 5k$

On vérifie que le couple $(1 + 5k\ ;\ 1 + 8k)$ est solution de (E).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(1 + 5k\ ;\ 1 + 8k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2°)

m : entier relatif tel qu'il existe un couple $(p\ ;\ q) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

• Démontrons que le couple $(p\ ;\ q)$ est solution de l'équation (E).

On a $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$ donc $8p + 1 = 5q + 4$ d'où $8p - 5q = 3$.
Donc le couple $(p\ ;\ q)$ est solution de l'équation (E).

• Déduisons-en que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

On sait que $p = 5k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $m = 8(5k + 1) + 1$
$= 40k + 9$

On en déduit que $m \equiv 9$ (mod. 40).

3°) **Déterminons le plus petit de ces nombres *m* supérieurs à 2000.**

Le plus petit entier congru à 9 modulo 40 supérieur à 2000 est 2009.

Donc $2009 = 8 \times 251 + 1$ et $2009 = 5 \times 401 + 4$.

II.

1°) **Démontrons que, pour tout nombre entier naturel *k*, on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.**

On a : $2^3 \equiv 1$ (mod. 7).

Donc, en élevant les deux membres à la puissance *k*, on obtient : $\left(2^3\right)^k \equiv 1^k$ (mod. 7) soit $2^{3k} \equiv 1$ (mod. 7).

2°) **Déterminons le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7.**

On a : $2009 = 2007 + 2 = 3 \times 669 + 2$.

Donc $2^{2009} = 2^{3\times669+2}$

Or d'après la question 1°), $2^{3\times669} \equiv 1$ (mod. 7) donc $2^{3\times669} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2$ (mod. 7)
D'où $2^{2009} \equiv 4$ (mod. 7).

Comme $0 \leqslant 4 < 7$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.

III.

$(a\,;b) \in \mathbb{N}^2$, $0 < a \leqslant 9$, $0 \leqslant a \leqslant 9$.

$N = a \times 10^3 + b$

1°) **Vérifions que $10^3 \equiv -1$ (mod. 7).**

On a : que $10 \equiv 3$ (mod. 7) d'où $10^3 \equiv 27$ (mod. 7).
Or $27 \equiv -1$ (mod. 7) donc $10^3 \equiv -1$ (mod. 7).

2°) **Déduisons-en tous les nombres entiers *N* divisibles par 7.**

$N = a \times 10^3 + b$

D'après la question 1°), on a : $N \equiv a \times (-1) + b$ (mod. 7) donc $N \equiv b - a$ (mod. 7).

N divisible par 7 $\Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod{7}$

$\Leftrightarrow b - a \equiv 0 \pmod{7}$

$\Leftrightarrow b - a$ divisible par 7

On en déduit les valeurs possibles de N :

1001
1008
2002
2009
3003
4004
5005
6006
7000
7007
8001
8008
9002
9009