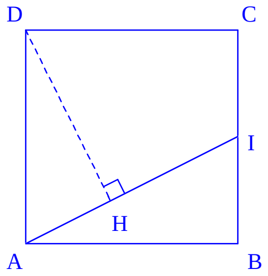
1ère S1

Contrôle du lundi 18 février 2013 (30 min)

Prénom : …………………………………. **Nom :** ……………………….. **Note : …. / 20**

I. (6 points)



Soit ABCD un carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de D sur (AI).

1°) Calculer $\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AD}$ en fonction de a.

2°) En déduire AH en fonction de a.

II. (6 points)

Soit ABCD un rectangle de centre O du plan *P*.

On considère les ensembles *E* et *F* ainsi définis :

$E=\left\{ \mathrm{M}\in P\ /\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0\right\}$; $F=\left\{ \mathrm{M}\in P\ /\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\}$.

Compléter les cadres ci-dessous.

Recherche de l'ensemble *E*

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M}\in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$

si et seulement si ……………………..…………………..

si et seulement si ……………………..…………………..

si et seulement si ……………………..…………………..

L'ensemble *E* est ……………………….……………………………………………….

Recherche de l'ensemble *F*

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M}\in F$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

si et seulement si ……………………..…………………..

si et seulement si ……………………..…………………..

si et seulement si ……………………..…………………..

L'ensemble *F* est ……………………….……………………………………………….

III. (2 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non orthogonaux du plan.

Dire si l'égalité suivante est vraie ou fausse. Cocher la bonne réponse.

$$\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{v}\right)=2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

☐ vrai ☐ faux

IV. (2 points)

Une personne ouvre un livret d'épargne rémunéré à un taux annuel de 3,8 % et place de l'argent pendant deux ans : 750 € dès la première année et 850 € supplémentaires la deuxième année.

À la fin des deux années, quelle somme possèdera la personne ?
Donner sans justifier la valeur arrondie au centième (calculs au brouillon).

……………………..

V. (4 points)

Pour tout entier naturel *n*, on note E_n l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à *n* (ainsi, on peut écrire : $E_n=\{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$).
On s'intéresse aux sous-ensembles A de E_n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$:

« Si *k* appartient à A, alors $k+1$ et $k+2$ n'appartiennent pas à A »

(*k* désigne un entier naturel)

1°) Dans cette question, on se place dans le cas où $n=15$ (donc $E_{15}=\{0\,;1\,;\ldots\,;15\}$).

Les sous-ensembles suivants de E_{15} vérifient-ils la propriété $\mathscr{P}$? Répondre par oui ou non sans justifier.

a) $\mathrm{A}_1=\{1\,;5\,;9\,;14\}$ ☐ oui ☐ non

b) $\mathrm{A}_2=\{0\,;4\,;12\,;14\}$ ☐ oui ☐ non

c) $\mathrm{A}_3=\{7\,;10\}$ ☐ oui ☐ non

2°) Dans cette question, on se place dans le cas où $n=20$.

Donner un exemple de sous-ensemble A de E_{20} vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ et tel que son cardinal* soit égal à 5.

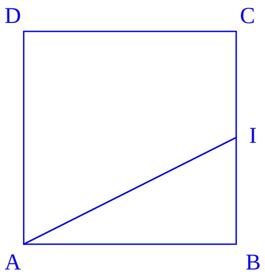
A = { …… ; …… ; …… ; …… ; ……}

* On rappelle que le **cardinal** d'un ensemble fini est égal à son nombre d'éléments.

Corrigé du contrôle du 18-2-2013

I.

ABCD : carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$)
I : milieu de [BC]



1°) **Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ en fonction de *a*.**

1ère méthode : par décomposition

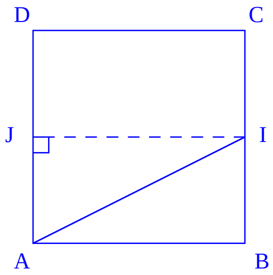
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= 0 + \overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0 \text{ car } (\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{AD})) \\ &= \mathrm{BI} \times \mathrm{AD} \qquad (\text{car } \overrightarrow{\mathrm{BI}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ sont colinéaires de même sens}) \\ &= \frac{a}{2} \times a \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

2e méthode : par réécriture d'un vecteur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad (\text{car le projeté orthogonal de A sur (BC) est B et le projeté orthogonal de I sur (BC) est I}) \\ &= \mathrm{BI} \times \mathrm{BC} \quad (\text{car } \overrightarrow{\mathrm{BI}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{BC}} \text{ sont colinéaires de même sens}) \\ &= \frac{a}{2} \times a \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

3e méthode : par projection orthogonale

On note J le milieu de [AD].
J est le projeté orthogonal de I sur (AD) (démonstration très facile).



Donc
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \mathrm{AJ} \times \mathrm{AD} \quad (\text{car } \overrightarrow{\mathrm{AJ}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ sont colinéaires de même sens}) \\ &= \frac{a}{2} \times a \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

• Il n'y a pas de moyen de vérifier le résultat d'un produit scalaire car le produit scalaire n'a pas d'interprétation concrète.

On peut juste observer que le produit scalaire est positif, ce qui est normal car les deux vecteurs forment un angle aigu.

• Certains élèves ont bien pensé à décomposer l'un des deux vecteurs pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ mais, malheureusement, ils ont ensuite remplacé les vecteurs par les longueurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \left(a + \frac{a}{2}\right) \times a$ etc., faute grave qui ruinait toute la suite du raisonnement.

• On pouvait calculer le cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{IAD}}$ mais il fallait s'y prendre en empruntant un chemin détourné : il fallait écrire $\widehat{\mathrm{IAD}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{BAI}}$ donc $\cos \widehat{\mathrm{IAD}} = \sin \widehat{\mathrm{BAI}}$ (selon la relation $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$).

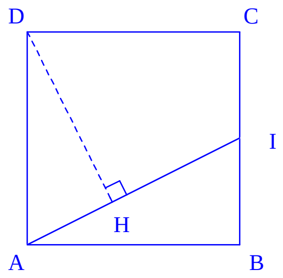
$$\sin \widehat{\mathrm{BAI}} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On pouvait ensuite calculer le produit scalaire demandé.

Cette méthode marche mais est un peu longue.

2°) **Déduisons-en AH fonction de *a*.**

H : projeté orthogonal de D sur (AI)



On utilise le théorème de projection orthogonale.

$\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AI}$ car H est le projeté orthogonal de D sur (AI)

$= AH \times AI$ car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens

Donc $AH \times AI = \dfrac{a^2}{2}$.

D'où $AH = \dfrac{a^2}{2AI}$

Calculons AI.

Dans le triangle AIB, rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AI^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{5a^2}{4}$.

Donc $AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$$AH = \dfrac{a^2}{2 \times \dfrac{a\sqrt{5}}{2}}$$

Par conséquent, on a : $\mathbf{AH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}}$.

• Beaucoup d'élèves ont cherché à utiliser l'angle $\widehat{DAI}$.
Mais il n'est pas possible de connaître facilement la mesure en degrés de cet angle (il ne mesure pas 60 ° ; la droite (AI) n'est pas non plus la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$) ; il n'est pas possible d'utiliser des configurations de référence.

• Attention aux écritures très lourdes : beaucoup d'élèves ont utilisé les normes de vecteurs avec deux barres, écritures très lourdes à éviter.

• Il fallait bien comprendre la logique de cet exercice.
Dans la question 1°), on n'utilisait pas le point H pour calculer le produit scalaire demandé ; on allait l'utiliser seulement dans la question 2°).

II.

ABCD : rectangle de centre O

• $\boldsymbol{E = \left\{ M \in P \ / \ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AM} = 0 \right\}}$

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AM} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

L'ensemble *E* est la droite passant par A perpendiculaire à (AC).

• $\boldsymbol{F = \left\{ M \in P \ / \ \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AM} \right\}}$

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in F$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AM}$

si et seulement si $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{AM} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{OM} \bullet \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$

L'ensemble *F* est le cercle de diamètre [OB].

Remarque : La droite *E* n'est pas parallèle à (BD) si ABCD n'est pas un carré.

III.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$: vecteurs non orthogonaux du plan

L'égalité $\left(2\vec{u}\right) \bullet \left(2\vec{v}\right) = 2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$ est **fausse**.

En effet, l'égalité correcte est : $\left(2\vec{u}\right) \bullet \left(2\vec{v}\right) = (2 \times 2) \times \left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) = 4\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$ (propriété du cours : $\left(k\vec{u}\right) \bullet \left(k'\vec{u'}\right) = kk'\left(\vec{u} \bullet \vec{u'}\right)$).

IV.

Une personne ouvre un livret d'épargne rémunéré à un taux annuel de 3,8 % et place de l'argent pendant deux ans : 750 € dès la première année et 850 € supplémentaires la deuxième année.

À la fin des deux années, quelle somme possèdera la personne ?

1690,38 €

Calculs :

$$750\times\left(1+\frac{3,8}{100}\right)=778,5$$

$$778,50+850=1628,50$$

$$1628,5\times\left(1+\frac{3,8}{100}\right)=1690,383$$

V. Ensembles

$n\in\mathbb{N}$ $\quad E_n=\{0\,;1\,;\ldots;n\}$

On s'intéresse aux sous-ensembles A de E_n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$:

« Si k appartient à A, alors $k+1$ et $k+2$ n'appartiennent pas à A »

La propriété $\mathscr{P}$ est exprimée sous la forme d'une **phrase ouverte**.

1°) $\boldsymbol{n=15}$

$E_{15}=\{0\,;1\,;\ldots;15\}$

a) $\mathrm{A}_1=\{1\,;5\,;9\,;14\}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

b) $\mathrm{A}_2=\{0\,;4\,;12\,;14\}$ ne vérifie pas la propriété $\mathscr{P}$.

c) $\mathrm{A}_3=\{7\,;10\}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2°) $\boldsymbol{n=20}$

$\mathrm{A}=\{1\,;5\,;9\,;12\,;19\}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

Pour écrire cet ensemble, il faut avoir compris que la propriété $\mathscr{P}$ signifie que l'écart (la distance) entre deux éléments de A doit être supérieur ou égale à 3.

Ce sous-ensemble, comme ceux de la question 1°), est écrit en extension.

On écrit une liste ordonnée d'entiers naturels compris entre 1 et 20 au sens large.
Les éléments doivent avoir un écart strictement supérieur à 2.