

Il s'agit de résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système (S)  $\begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$ .

1°) Démontrer qu'il existe un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tel que  $19u + 12v = 1$ .  
(On ne demande de donner un exemple d'un tel couple.)

Vérifier que pour un tel couple, le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution de (S).

2°)

a) Soit  $n_0$  une solution de (S). Vérifier que le système (S) équivaut à :  $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$ .

b) Démontrer que le système (S) équivaut à  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3°)

a) Trouver un couple  $(u, v)$  solution de l'équation  $19u + 12v = 1$  et calculer la valeur de  $N$  correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2°) b)).

4°) Un entier naturel  $n$  est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6, et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13.

On divise  $n$  par  $228 = 12 \times 19$ . Quel est le reste  $r$  de cette division ?