TS — Exercices sur les primitives

Dans les exercices **1** à **16**, on demande de justifier que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I proposé et de donner une primitive F de f sur I.

---

1 $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$; $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$

2 $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

3 $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

4 $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin(4x) + 1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

5 $f : x \mapsto \cos x \times \sin^5 x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

6 $f : x \mapsto \tan^2 x$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

7 $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$

8 $f : x \mapsto \cos^2 x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ (indication : linéariser $f(x)$)

9 $f : x \mapsto (3x-1)^5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

10 $f : x \mapsto x\cos x + \sin x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

11 $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; $\mathrm{I} =]-\infty\,;2[$

12 $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

13 $f : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

14 $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

15 $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

16 $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

17 On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$.

Déterminer une primitive de f et g sur $]0\,;+\infty[$.

18 On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$.

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

19 1°) On considère la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$. Calculer $F'(x)$.

2°) En déduire les primitives de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

20 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]$. Calculer $f'(x)$.

2°) En déduire une primitive de la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

21 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^3}$.

1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.

2°) En déduire une primitive F de f sur $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$.

22 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x}{\left(x^2+x+2\right)^2}$.

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x+2}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

23 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$.

1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$.

2°) En déduire une primitive F de f sur $\mathrm{I} =]2\,;+\infty[$.

24 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{2x}$.

1°) Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer une fonction polynôme P du second degré telle que la fonction $F : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{25}$ On considère les fonctions $u : x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

On admettra que $u(x)>0$ pour tout réel x.

Vérifier que $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout réel x.

En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{26}$ 1°) On pose $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Démontrer que $\forall x\in\mathcal{D}\quad \sin x=2\cos^2\dfrac{x}{2}\times\tan\dfrac{x}{2}$.

Indication : Utiliser la formule $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin 2t=2\sin t\cos t$.

En déduire une primitive de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ sur chacun des intervalles qui constituent $\mathcal{D}$.

2°) On pose $\mathcal{D}'=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

À l'aide du résultat précédent, déterminer une primitive de la fonction $g : x\mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ sur chacun des intervalles qui constituent $\mathcal{D}'$.

Corrigé

Méthode pour la plupart des exercices : on essaie de reconnaître une forme.
On fait une réécriture en utilisant éventuellement une constante d'ajustement.
On agit un peu mécaniquement (de même que lorsque l'on calcule une dérivée, on ne se remémore pas à chaque fois que la fonction).

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}}$; $\mathrm{I} =]1 ; +\infty[$

f est continue sur I donc elle admet des primitives sur I.

On reconnaît une forme du type $\dfrac{u'}{u^2}$.

On pose $u(x) = x^2 - 1$.

On a alors $u'(x) = 2x$.

On peut écrire $f = \dfrac{u'}{u^2}$.

Une primitive de f sur I est donc la fonction $F = -\dfrac{1}{u}$.

Une primitive de f sur I est la fonction F définie sur I par $F(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$.

Remarques :

• L'énoncé demande une primitive donc il n'y a pas de constante k à mettre.

• On peut vérifier que $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^2}$.

On pose $u(x) = x^2 + 2x + 4$.

On a alors $u'(x) = 2x + 2$

Réécriture de la fonction f : $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$ ($\dfrac{1}{2}$ est une « constante d'ajustement »)

Une primitive de f sur I est la fonction $F = -\dfrac{1}{2u}$.

Conclusion :

Une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2\left(x^2+2x+4\right)}$ (il est inutile de développer le dénominateur).

Remarque (vérification) :

On peut vérifier que $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$.

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = x^2 + 4$.

On a alors $u'(x) = 2x$.

Réécriture de la fonction f : $f = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ ($\dfrac{3}{2}$ est une « constante d'ajustement »)

$F = \dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{u} = 3\sqrt{u}$

$F(x) = 3\sqrt{x^2+4}$

En dérivant F, on peut vérifier que l'on « retombe » sur f.

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin(4x) + 1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On effectue une primitive terme à terme en utilisant la règle « la primitive d'une somme est égale à la somme des primitives ».

Primitive de $\cos x$: $\sin x$; primitive de $\sin 4x$: $-\dfrac{1}{4}\cos 4x$ (règle sur les primitives de $\sin(ax+b)$: $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ qu'on doit savoir par cœur mais qu'on retrouve très facilement) ; primitive de 1 : x.

$F(x) = 3\sin x - 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\cos 4x\right) + x$

$F(x) = 3\sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x + x$

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \cos x \times \sin^5 x}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x) = \sin x$.

$u'(x) = \cos x$

Réécriture de la fonction f : $f = u'u^5$

$F=\dfrac{u^6}{6}$

$F(x)=\dfrac{\sin^6 x}{6}$ (rappel : $\sin^6 x=(\sin x)^6$)

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \tan^2 x$; $\mathrm{I}=\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

On effectue une astuce de réécriture.

Il faut faire une réécriture : $f(x)=(\tan^2 x+1)-1$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto \tan^2 x+1$ sur I est la fonction $x \mapsto \tan x$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto 1$ sur I est la fonction $x \mapsto x$.

On en déduit qu'une primitive de la fonction *f* sur I est la fonction *F* définie sur I par $F(x)=\tan x - x$.

$\boxed{7}$ Forme $\dfrac{u'}{u^n}$ (primitive : $-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+k$) avec $u(x)=\sin x$; $F(x)=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; $\mathrm{I}=]0\,;\pi[$

$u(x)=\sin x$
$u'(x)=\cos x$

$f=\dfrac{u'}{u^3}$

$F=-\dfrac{1}{2u^2}$

$F(x)=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}$

$\boxed{8}$ Écrire : $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (linéarisation de $\cos^2 x$) ; on fait la primitive terme à terme.
$F(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \cos^2 x$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On utilise la formule suivante $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ appelée formule de linéarisation.
Elle provient de la formule de duplication $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}$ (linéarisation)

On peut éventuellement écrire $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\cos 2x$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin 2x}{2}$ (primitive de $\cos(ax+b)$: $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)=\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$)
$=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$

$\boxed{9}$ Forme $u'u^n$ avec $u(x)=3x-1$; $f=\dfrac{1}{3}u'u^5$ d'où $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^6}{6}=\dfrac{u^6}{18}$; $F(x)=\dfrac{(3x-1)^6}{18}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto (3x-1)^5$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x)=3x-1$.

On a alors : $u'(x)=3$.

On peut donc écrire $f=\dfrac{1}{3}u'u^5$.

Donc une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^6}{6}=\dfrac{u^6}{18}$.

$F(x)=\dfrac{(3x-1)^6}{18}$

$\boxed{10}$ On reconnaît la forme $u'v+uv'$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=\sin x$; $F(x)=x\sin x$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x\cos x+\sin x$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On effectue une réécriture de $f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=x\times\cos x+1\times\sin x$

On reconnaît la forme $u'v+uv'$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x)=\sin x$ et $v(x)=x$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F = uv$.

$F(x) = x\sin x$

$\boxed{11}$ On applique la formule du cours pour une fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ où a et b sont deux réels tels que a soit non nul.

$F(x) = -2\sqrt{2-x}$

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}}$; $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,2[$

On applique la formule de primitive d'une fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ avec $a = -1$ et $b = 2$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{-2}{1} \times \sqrt{2-x} \\ &= -2\sqrt{2-x} \end{aligned}$$

Autre méthode :

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = 2 - x$.

$u'(x) = -1$

On peut écrire : $f = -\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x) = -2\sqrt{2-x}$.

Remarque :

On pourrait écrire : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

Mais cette écriture n'est pas exploitable pour la primitive.
Toutes les formes font intervenir les dérivées.

$\boxed{12}$ $F(x) = -2\sqrt{2+\cos x}$

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = 2 + \cos x$.

On a : $u'(x) = -\sin x$.

On a donc $\sin x = -u'(x)$.

On peut donc écrire $f = -\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F = -2\sqrt{u}$.

$F(x) = -2\sqrt{2+\cos x}$

$\boxed{13}$ $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

1ère méthode :

On applique la formule de primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \cos(ax+b)$ avec $a = 2$ et $b = -\dfrac{\pi}{6}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2^{e} méthode :

On pose $u(x) = 2x - \dfrac{\pi}{6}$.

$u'(x) = 2$

$f = \dfrac{1}{2}u'\cos u$

$F = \dfrac{1}{2}\sin u$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{14}$ Réécriture : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Il s'agit de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\dfrac{1}{x}$; $F(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

On reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=-\dfrac{1}{x}$.

$u(x)=-\dfrac{1}{x}$

$u'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$f=u'\mathrm{e}^u$

$F=\mathrm{e}^u$

$F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$\boxed{15}$ Il s'agit de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$; $F(x)=\ln\left|\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right|=\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

valeur absolue de sécurité

On peut enlever la valeur absolue car $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}>0$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

$u(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

$u'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

$f=\dfrac{u'}{u}$

$F=\ln|u|$

$F(x)=\ln\left|\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right|=\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$

car $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}>0$

On utilise des valeurs absolues de sécurité que l'on fait sauter après.

$\boxed{16}$ On effectue la réécriture : $f(x)=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$.

Forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x)=3x+1$ et $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$u'(x)=3$

$f(x)=\dfrac{1}{3}\times 3\times(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f=\dfrac{1}{3}u'u^{\frac{1}{2}}$ d'où $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2u^{\frac{3}{2}}}{9}$; $F(x)=\dfrac{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{9}$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{3x+1}}$; $\mathrm{I}=\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ (on pourrait prendre $\mathrm{I}=\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$)

On effectue la réécriture : $\boxed{f(x)=(3x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

On est obligé d'utiliser un exposant fractionnaire.)

On pense à la forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x)=3x+1$ (ce qui donne $u'(x)=3$) et $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

On peut écrire $f=\dfrac{1}{3}\times u'\times u^{\frac{1}{2}}$.

$F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$F=\dfrac{2u^{\frac{3}{2}}}{9}$

Une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{9}$.

$\boxed{17}$ Réécrire les quotients en produits.

Il s'agit des formes $u'\cos u$ et $u'\sin u$ avec $u(x)=\ln x$; $F(x)=\sin(\ln x)$; $G(x)=-\cos(\ln x)$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}}$ et $\boldsymbol{g : x \mapsto \dfrac{\sin(\ln x)}{x}}$

Déterminons des primitives de f et g sur $]0\,;+\infty[$.

• **Primitive de f :**

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x)=\dfrac{1}{x}\times\cos(\ln x)$

On reconnaît la forme u' cos u avec $u(x)=\ln x$.

On est obligé de faire la réécriture pour reconnaître la forme.

On peut écrire $f=u'\cos u$.

Donc une primitive de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$ est la fonction F définie par $F(x)=\sin(\ln x)$.

• **Primitive de g :**

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad g(x)=\dfrac{1}{x}\times\sin(\ln x)$

On reconnaît la forme u' sin u avec $u(x)=\ln x$.

On peut écrire $g=u'\times\sin u$.

Donc une primitive de g sur $\left]0\,;+\infty\right[$ est la fonction G définie par $G(x)=-\cos(\ln x)$.

$\boxed{18}$ On réécrit $f(x)=x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\times 2x\times\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

On reconnaît une forme du type $u'u^{\alpha}$.

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$2^{\frac{3}{2}}=2^1\times 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}}$ définie sur $\mathbb{R}$

Déterminons la primitive F de f qui s'annule en 1.

Structure de l'exercice :
On procède en 2 étapes.

1. On détermine l'ensemble des primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (famille des primitives définies avec $k\in\mathbb{R}$).
2. On détermine k en tenant compte de la condition.

On pense à la forme $u'u^{\alpha}$.

On pose : $u(x)=x^2+1$.

On a alors $u'(x)=2x$.

On prend $\alpha=\dfrac{1}{2}$ (on est obligé d'utiliser les exposants fractionnaire).

On peut écrire $f=\dfrac{1}{2}\times u'\times u^{\frac{1}{2}}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F=\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire les fonctions

$F=\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{3}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par $F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+k \quad (k\in\mathbb{R})$.

On cherche k tel que $F(1)=0 \quad (1)$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{\left(1^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+k=0\\
&\Leftrightarrow \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}+k=0\\
&\Leftrightarrow \frac{2^1\times 2^{\frac{1}{2}}}{3}+k=0\\
&\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3}+k=0\\
&\Leftrightarrow k=-\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Autres écritures possibles de $\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$: $\sqrt{(2x+3)^3}$ ou $\left(\sqrt{2x+3}\right)^3$.
Mais c'est moyen de les utiliser (elles n'apportent rien par rapport à l'exposant fractionnaire).

$\boxed{19}$

1°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = \ln x$

2°) Les primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $g : x \mapsto x\ln x - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Solution détaillée :

1°) $F : x \mapsto x\ln x - x$

Calculons $F'(x)$.

On peut affirmer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant les règles sur le produit et la somme de fonctions dérivables sur un intervalle (on travaille ici sur $\mathbb{R}_+^*$).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$ (on utilise la formule de dérivée d'un produit pour dériver $x\ln x$)

$= \ln x + 1 - 1$

$= \ln x$

2°) Déduisons-en les primitives de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 1°), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = f(x)$.

D'après la question 1°), la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto x\ln x - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

On peut retenir pour les exercices qu'une primitive de la fonction logarithme népérien est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ (ce résultat sera utilisable directement sans justifier).

$\boxed{20}$

1°) Attention : $f(x) = \boxed{x}\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]$.
Il faut bien voir le x qui précède le crochet.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = (\ln x)^2 - 2$

2°) D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = f'(x) + 2$.
Une primitive de la fonction f' est f (il suffit de réfléchir deux minutes pour voir pourquoi ; tout simplement, parce que la dérivée de f c'est f').

Les primitives de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $G : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Solution détaillée :

1°) $f : x \mapsto \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]}_{v(x)}$

Calculons $f'(x)$.

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

On applique la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

Pour la dérivée de $(\ln x)^2$, on applique la formule $(U^2)' = 2UU'$.
Pour la dérivée de $2\ln x$, on écrit $2 \times \ln x$ et on utilise la formule $(kU)' = kU'$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 \times \left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + x \times \left(2\ln x \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x}\right)$

$= (\ln x)^2 - 2\ln x + 2\ln x - 2$

$= (\ln x)^2 - 2$

Dérivée de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$:
On applique la formule $(U^2)' = 2UU'$ qui correspond à la formule générale : $(U^n)' = nU'U^{n-1}$.

2°) **Déduisons-en une primitive de la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.**

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = f'(x) + 2$.
f est une primitive de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ donc une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $G : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

On peut aussi incorporer le x dans le crochet comme suit.
Les primitives de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $G : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right] + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{21}$

1°) $a = 2$; $b = 5$

2°) Une primitive de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ est la fonction F définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$F(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^3}$

La fonction f appartient à la famille des fonctions rationnelles.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Structure de l'exercice :

On ne sait pas trouver directement une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

1°) Transformation d'écriture
2°) Primitive en utilisant la forme obtenue au 1°).

Ce type d'énoncé sera toujours guidé en Terminale.
On nous guidera toujours en Terminale dans ce type d'exercice.

1°) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall x \in D_f \quad f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.

On procède par identification (identification des coefficients) en faisant très attention à la rédaction (avec l'expression « il suffit de choisir a et b tels que »).

On pose $g(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad g(x) = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^3} = \frac{ax-a+b}{(x-1)^3}$$

Pour que f et g soient égales, il $\boxed{\text{suffit}}$ de choisir a et b tels que $\begin{cases} a=2 \\ -a+b=3 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$.

On vérifie que ces deux valeurs conviennent c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{(x-1)^3}$.

Autre méthode :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = \frac{2(x-1)+5}{(x-1)^3} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}$$

Quelques remarques :

1. Attention à la rédaction de ce type de question :
On ne peut pas raisonner correctement pas équivalence en terminale.

2. On pourrait aussi avoir recours à un logiciel de calcul formel (commande « décomposition en éléments simples »).

3. On pourrait aussi avoir recours à la méthode par valeurs tests.

2°) **Déduisons-en une primitive F de f sur $I =]1\,;+\infty[$.**

On pose $u(x) = x - 1$.
$u'(x) = 1$

$$f = \frac{2u'}{u^2} + \frac{5u'}{u^3}$$

On peut aussi écrire : $f = 2 \times \dfrac{u'}{u^2} + 5 \times \dfrac{u'}{u^3}$.

Grâce à l'écriture obtenue dans la question 1°), on reconnaît la somme de deux fonctions de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$.

Une primitive de f sur I est donc la fonction F définie sur I par $F(x) = -\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{2(x-1)^2}$.

En effet, la primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ où n est un entier différent de 1 est la fonction $-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.

On a la somme de deux formes de ce type $\dfrac{u'}{u^n}$.

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier la primitive.

On peut éventuellement mettre au même dénominateur. On obtient alors $F(x) = -\dfrac{4x+1}{2(x-1)^2}$.

$\boxed{22}$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \dfrac{-ax^2 - 2bx + 2a - b}{(x^2+x+2)^2}$ d'où par identification : $\begin{cases} a=-1 \\ -2b=4 \\ 2a-b=0 \end{cases}$. Donc : $a=-1$; $b=-2$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x}{\left(x^2+x+2\right)^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

Déterminons deux réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+2}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x)=\frac{a\left(x^2+x+2\right)-(ax+b)(2x+1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$
$$=\frac{ax^2+ax+2a-2ax^2-ax-2bx-b}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+2a-b}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$

Pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $F'=f$), il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases}-a=1\\-2b=4\\2a-b=0\end{cases}$ (en identifiant les coefficients des termes de même degré) ce qui donne $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$.

Conclusion :

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+2}$.

$\boxed{23}$ 1°) On peut par exemple mettre le numérateur de $f(x)$ sous forme canonique en écrivant :

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+4-6}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}=1-\dfrac{6}{(x-2)^2}$ d'où $a=1$; $b=-6$; 2°) $F(x)=x+\dfrac{6}{x-2}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

1°) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$.

1ère méthode :

On pose : $g(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad g(x)=\frac{a(x-2)^2+b}{(x-2)^2} \qquad \text{(on met au même dénominateur)}$$
$$=\frac{a\left(x^2-4x+4\right)+b}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{ax^2-4ax+4a+b}{(x-2)^2}$$

Pour que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f(x)=g(x)$, il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases}a=1\\-2=4a+b\\-4a=-4\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a=1\\b=-6\end{cases}$.

On vérifie que ces deux valeurs conviennent c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f(x)=1-\dfrac{6}{(x-2)^2}$ (1).

2e méthode :

On met le numérateur de $f(x)$ sous forme canonique.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f(x)=\frac{x^2-4x+4-6}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}$$
$$=1-\frac{6}{(x-2)^2}$$

3e méthode : par division euclidienne de polynômes

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x-2 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} -1\times\left(x^2-4x+4\right) & 1 \\ \cline{1-1} -6 & \end{array}$$

Le degré du polynôme – 6 est strictement inférieur à celui du diviseur.

On peut écrire : $x^2-4x-2=\left(x^2-4x+4\right)\times 1-6$.

En divisant les deux membres de cette égalité par x^2-4x+4, on obtient : $\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}=1-\dfrac{6}{(x-2)^2}$.

4e méthode : méthode par valeurs tests

2°) Déduisons-en une primitive F de f sur $\text{I}=\left]2\ ;+\infty\right[$.

D'après l'égalité (1) obtenue à la question précédente, une primitive de f sur I est la fonction F définie par :
$F(x)=x+\dfrac{6}{x-2}$.

$\boxed{24}$ 2°) **Idée :** poser $P(x)=ax^2+bx+c$. On trouve : $P(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto x^2 e^{2x}}$

1°) Justifions que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer une fonction polynôme P du second degré telle que la fonction F: $x \mapsto P(x)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On ne peut pas déterminer une primitive de f directement (car on ne reconnaît pas une forme) d'où le fait que l'énoncé guide pour trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Posons $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels.

On a alors $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=(2ax+b)e^{2x}+\left(ax^2+bx+c\right)2e^{2x}$$
$$=\left[2ax^2+(2a+2b)x+b+2c\right]e^{2x}$$

Remarque : Il est nécessaire de donner le résultat de $F'(x)$ sous forme factorisée.

Pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $F'=f$), il suffit de choisir a, b, c tels que :

$$(S)\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}$$ (égalités obtenues par identification des coefficients sachant que $x^2=1x^2+0x+0$)

On effectue une identification des coefficients du polynôme $2ax^2+(2a+2b)x+b+2c$ et du polynôme x^2.

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$ (résolution immédiate)

On obtient $F(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)e^{2x}$.

On effectue la vérification (puisque l'on a fait un raisonnement par condition suffisante).
On calcule $F'(x)$ et l'on observe que $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$.

On peut aussi appliquer directement le théorème d'égalité de deux fonctions polynômes.

$\boxed{25}$

On commence par calculer $u'(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ (on enlève le 2 de $2x$ et le 2 de $2\sqrt{x^2+1}$)
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

On part de l'égalité $u'(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
On divise par $u(x)$ les deux membres de l'égalité (on « fait passer » le $u(x)$ à gauche).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$$

$a=\dfrac{b}{c}$ donne $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{c}$

Déduisons-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On vu que $f=\dfrac{u'}{u}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F=\ln|u|$.
F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$.
Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad u(x)>0$ donc $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

26

1°)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{x}{2} \times \cos\frac{x}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} \quad \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2} \times \tan\frac{x}{2}$$

$$\forall x \in \boldsymbol{D} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2} \times \tan\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}$$

On sait que la dérivée de $\tan x$ est $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

La dérivée de $\tan\frac{x}{2}$ est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$.

$$u(x) = \tan\frac{x}{2}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

Une primitive de *f* sur chaque intervalle qui constitue $\boldsymbol{D}$ est la fonction F : $x \mapsto \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2°)

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ (formule de trigonométrie de base).

On a donc $\forall x \in \boldsymbol{D}' \quad g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ ce qui permet de dire que $\forall x \in \boldsymbol{D}' \quad g(x) = f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Une primitive de *g* sur chaque intervalle qui constitue $\boldsymbol{D}'$ est la fonction *G* définie par $G(x) = F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$G(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| + k$$

$$G(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + k$$

Savoir-faire du chapitre sur les primitives

À la fin de ces exercices, les élèves doivent savoir calculer des primitives dans des cas simples :

- lecture inverse du tableau des dérivées ;
- transformations d'écriture.

Il faut aussi savoir démontrer qu'une fonction donnée est une primitive d'une autre fonction (ce qui est très simple, il suffit de dériver la fonction donnée).

Enfin, il faut savoir chercher une primitive d'une fonction sous une forme donnée (méthode des coefficients indéterminés).

Plus tard, avec le chapitre des intégrales, on verra une autre façon de déterminer une primitive avec les intégrales.

Primitives du type $u'\times u^n$, $\dfrac{u'}{u^n}$, $\dfrac{u'}{u}$.

Présence de valeurs absolues.

Primitives usuelles

1°) Primitives des fonctions de référence

Fonction f définie par $f(x)=$	Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x)=$	Intervalle(s) de validité
$a \ (a\in\mathbb{R})$	$ax+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x^2	$\dfrac{x^3}{3}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\dfrac{1}{x^n} \ (n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b) \ (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b) \ (a\neq 0)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} \ (a\neq 0)$	$\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathcal{D}_f\setminus\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x+k \ (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{e}^{ax} \ (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x} \ (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k \ (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{ax+b} \ (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}\right[\cup\left]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+k \ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}\right\}$

2°) Primitives déduites des règles de dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive
$u'+v'$	$u+v+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$au' \quad (a\in\mathbb{R})$	$au+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'v+uv'$	$uv+k \quad (k\in\mathbb{R})$
uu'	$\dfrac{u^2}{2}+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'u^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u^2} \quad (u\neq 0 \text{ sur I})$	$-\dfrac{1}{u}+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u^n} \quad (u\neq 0 \text{ sur I} ;\ n\geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}} \quad (u>0 \text{ sur I})$	$2\sqrt{u}+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'\sin u$	$-\cos u+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'\cos u$	$\sin u+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$\dfrac{u'}{u} \quad (u\neq 0 \text{ sur I})$	$\ln\lvert u\rvert+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u+k \quad (k\in\mathbb{R})$
$u'u^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}, u>0 \text{ sur I})$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k \quad (k\in\mathbb{R})$

N.B.

$\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$