RAPPELS DE TRIGONOMÉTRIE

I. Cosinus et sinus d'un réel

1°) Définitions

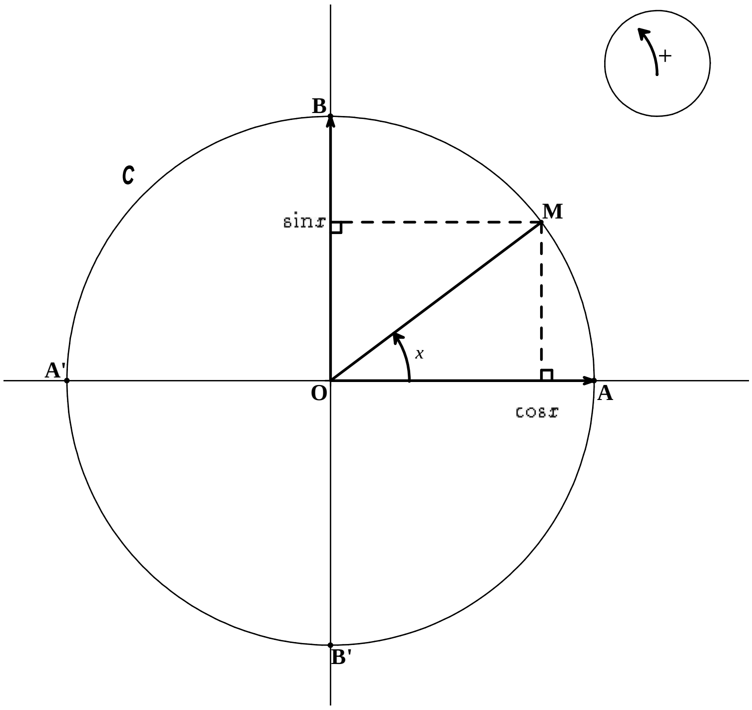
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.

x est un réel quelconque.

On note M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = x$ (exprimé en radians).

M est dit **associé** à x.



Les coordonnées du point M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ sont ($\cos x$; $\sin x$).

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \cos x\, \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sin x\, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

2°) Premières propriétés

Encadrement

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \text{ ou } |\cos x| \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \text{ ou } |\sin x| \leqslant 1$$

Relation fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Périodicité

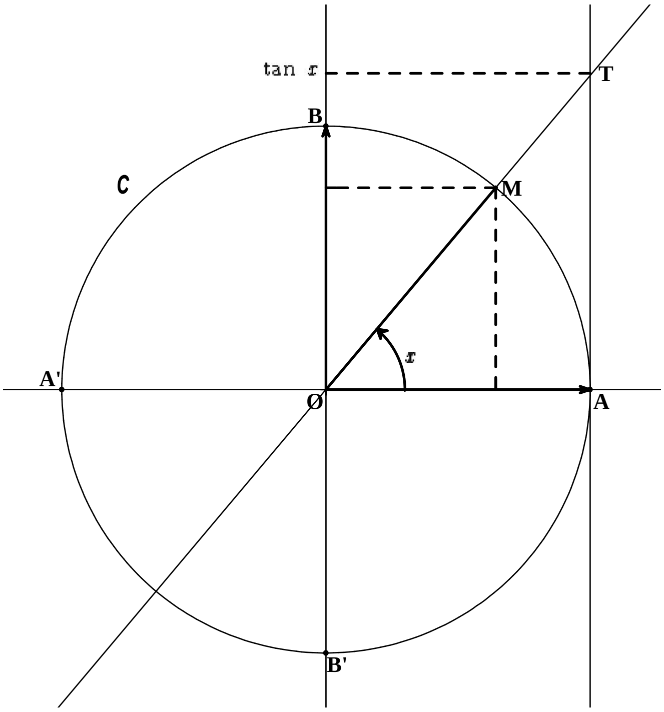
x un réel quelconque et k un entier relatif quelconque.
x et $x+2k\pi$ ont le même point associé sur le cercle trigonométrique.

$$\cos\left(x+2k\pi\right)=\cos x$$
$$\sin\left(x+2k\pi\right)=\sin x$$

II. Tangente d'un réel

1°) Définition

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ (tan x est défini ssi $\cos x\neq 0$ soit $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$)



2°) Lecture graphique de la tangente

On trace la tangente Δ en A au cercle trigonométrique.
Le point d'intersection T de (OM) et de Δ.

$\tan x=\overline{\mathrm{AT}}$ (mesure algébrique)

3°) Une relation à connaître

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

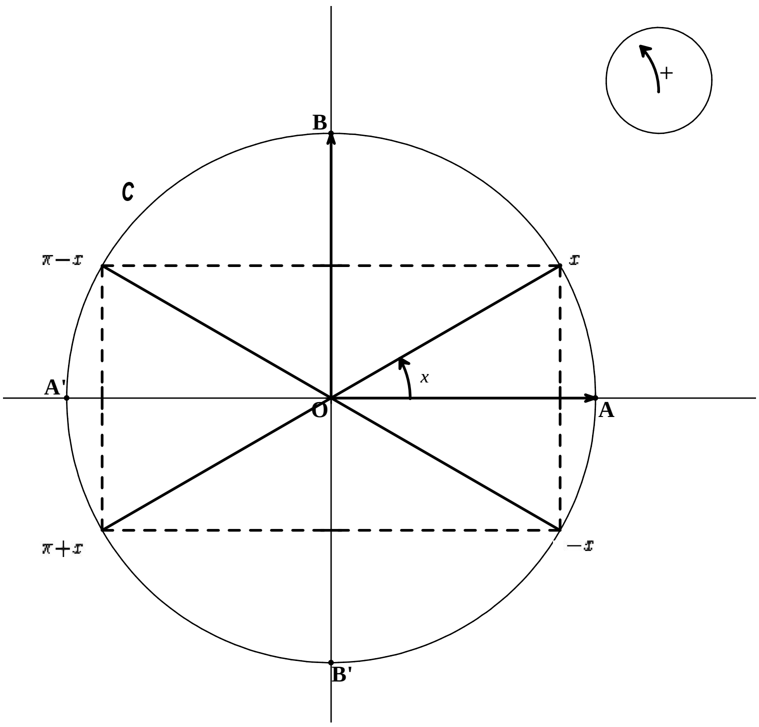
III. Valeurs remarquables (tableau à connaître par cœur)

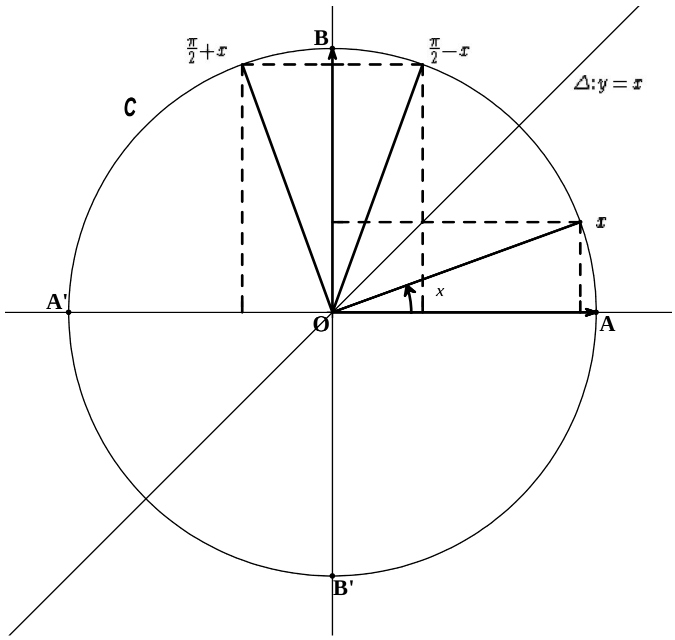
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

IV. Formules pour les cosinus et les sinus

1°) Angles associés (formules pour les cosinus et les sinus)

$\cos(-x)=\cos x$	$\cos(\pi+x)=-\cos x$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$
$\sin(-x)=-\sin x$	$\sin(\pi+x)=-\sin x$	$\sin(\pi-x)=\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$





2°) Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

3°) Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

4°) Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$2\cos^2 a = 1+\cos 2a$$
$$2\sin^2 a = 1-\cos 2a$$

$$1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$
$$1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

V. Équations et inéquations trigonométriques avec des cosinus et des sinus

1°) Équations trigonométriques

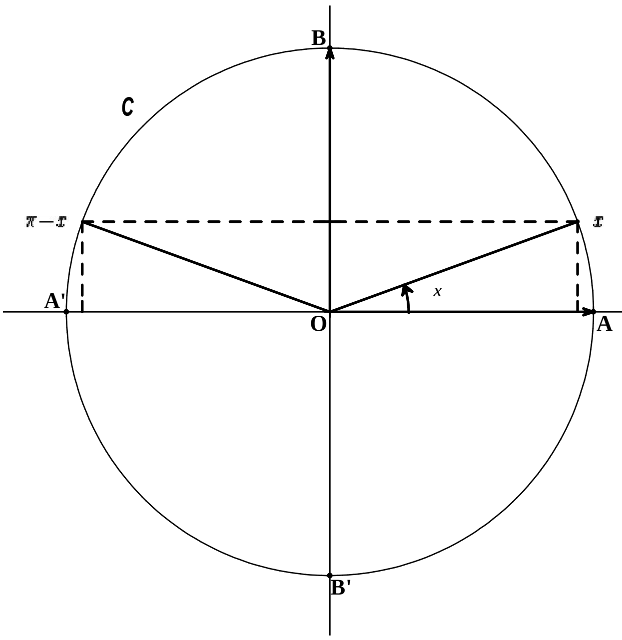
Égalité de deux cosinus ou de deux sinus

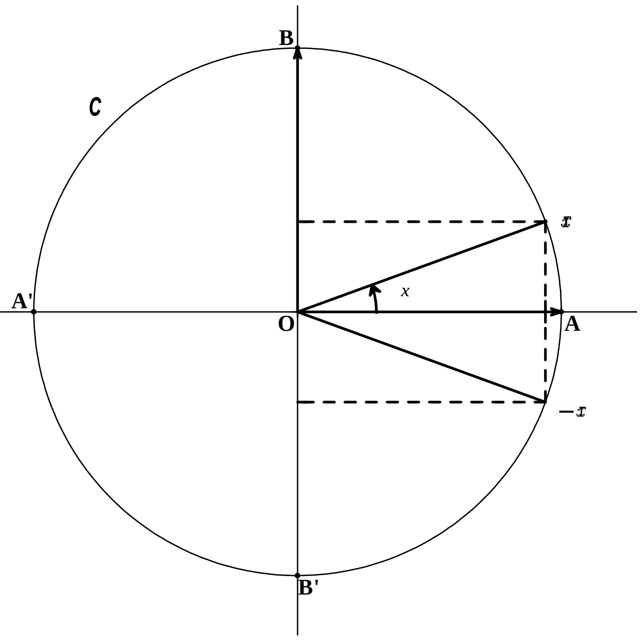
$\cos a = \cos b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = -b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

$\sin a = \sin b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = \pi - b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

Application aux équations trigonométriques avec des cosinus et des sinus

On utilise les égalités précédentes.





Cas particuliers :

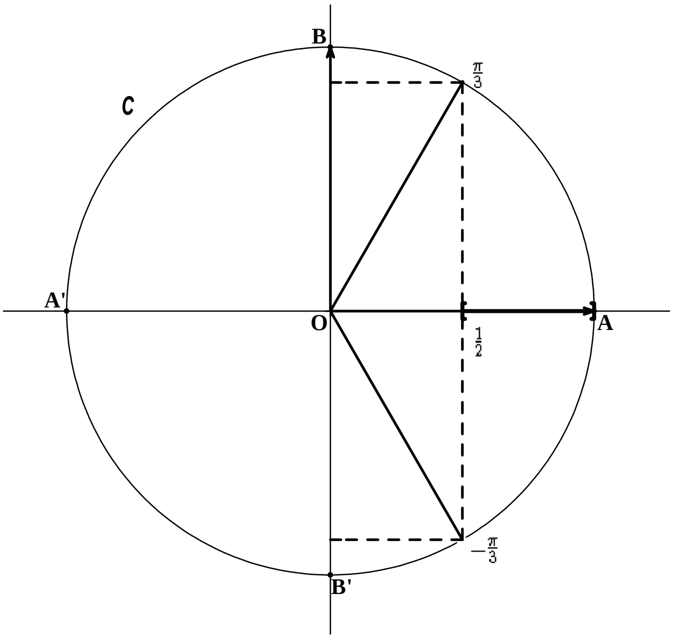
$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos x = 1 \iff x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2°) Inéquations trigonométriques

Elles se résolvent au moyen du cercle trigonométrique.

Exemple :

Résoudre l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.



$$S_{[0\,;\,2\pi]} = \left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right]$$

$$S_{[-\pi\,;\,\pi]} = \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$$

Compléments

x réel quelconque et k entier relatif quelconque. $\cos\left(x+k\pi\right)=\left(-1\right)^k\cos x$ $\sin\left(x+k\pi\right)=\left(-1\right)^k\sin x$

(facile à démontrer : distinguer le cas k pair et k impair ; lorsque k est pair, on peut poser $k=2p$ avec p entier naturel et lorsque k est impair, on peut poser $k=2p+1$ avec p entier naturel)

$\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x$

Formules dites « de triplication »

Intéressantes à connaître pour les élèves qui se destinent à une math. sup.

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

(facile à démontrer : écrire $\cos 3x=\cos\left(2x+x\right)$ et $\sin 3x=\sin\left(2x+x\right)$ puis utiliser les formules d'addition et de duplication)

Complément sur la tangente

$\tan\left(-x\right)=-\tan x$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	$\tan\left(\pi+x\right)=\tan x$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	$\tan\left(\pi-x\right)=-\tan x$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$ $x\neq k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$ $x\neq k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Cotangente d'un réel

1°) Définition

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ($\cot x$ est défini ssi $\sin x \neq 0$ soit $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$)

2°) Lecture graphique sur le cercle trigonométrique

On trace la tangente Δ' en B au cercle trigonométrique.
Le point d'intersection T' de (OM) et de Δ'.

$\tan x = \overline{\mathrm{BT'}}$ (mesure algébrique)

3°) Lien avec la tangente

Pour tout $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a : $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ (la cotangente est l'inverse de la tangente)

4°) Une relation à connaître

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$