TS spé — Exercices sur le calcul matriciel

1 On pose $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&-2\\3&2\end{pmatrix}$.

Calculer $A+B$.

2 On pose $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5&4\\1&8\end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice X carrée d'ordre 2 telle que $A+X=B$.

3 Calculer les matrices :

$A=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&7\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&7\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&7\end{pmatrix}$;

$F=\begin{pmatrix}2&1\\-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$.

4 On pose $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Calculer le produit AB.

5 On pose $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$.

Calculer les produits AB et BA. Que constate-t-on ?

6 On pose $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3, A^4, A^5 (à la main, en vérifiant éventuellement à l'aide de la calculatrice).
Proposer une formule pour A^n où n est un entier naturel quelconque. On ne cherchera pas à démontrer cette formule.

7 On pose $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.

8 Dans chaque cas, démontrer que A admet B pour matrice inverse.

1°) $A=\begin{pmatrix}5&-1\\-9&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&1\\9&5\end{pmatrix}$

2°) $A=\begin{pmatrix}-3&-5&5\\2&3&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&5&0\\1&2&1\\3&5&1\end{pmatrix}$

3°) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&5&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&-1&-4\\-5&3&10\end{pmatrix}$

9 Dans chaque cas, déterminer si la matrice A est inversible et si oui, donner son inverse.

1°) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ 2°) $A=\begin{pmatrix}4&2\\12&6\end{pmatrix}$ 3°) $A=\begin{pmatrix}0&2\\-1&1\end{pmatrix}$.

10 On pose $A=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que A admet une matrice inverse et la calculer.
2°) Déterminer la matrice X carrée d'ordre 2 telle que $AX=B$.
3°) Déterminer la matrice Y carrée d'ordre 2 telle que $YA=B$.

11 On pose $A=\begin{pmatrix}6&-4\\x&-6\end{pmatrix}$ où x désigne un réel.

1°) Déterminer le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2°) Déterminer le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

3°) Déterminer le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}2001&0\\0&2001\end{pmatrix}$.

12 Déterminer x tel que $\begin{pmatrix}x&100\\1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\x&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1100&1010\\110&101\end{pmatrix}$.

13 On pose $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&5&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-3\\4&0\\1&-2\end{pmatrix}$.

Calculer AB avec la calculatrice.

14 On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

À l'aide de la calculatrice, calculer A^2, A^3 et A^4.

15 Calculer avec la calculatrice l'inverse de chacune des matrices suivantes :

1°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ 2°) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

16 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & ab \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels non nuls fixés.

1°) À l'aide du site « dcode », vérifier que A est inversible et écrire son inverse.

2°) Démontrer le résultat obtenu en calculant $A^2 - A$.

Corrigé

$\boxed{1}$ $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & 2\end{pmatrix}$

Calculons A + B.

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & -1\\3 & 3\end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\1 & 8\end{pmatrix}$

Déterminons la matrice X carrée d'ordre 2 telle que $A+X=B$ (1).

Il s'agit d'une équation matricielle.

$$(1) \Leftrightarrow X=B-A$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}5-2 & 4-(-1)\\1-3 & 8-0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 5\\-2 & 8\end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ **Calculs de produits matriciels**

Pour pouvoir effectuer le produit de deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

On vérifie tous les calculs à la calculatrice.

Calculons les matrices :

- $A=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

formats (1 ; 2) et (2 ; 1)

$$A=\begin{pmatrix}-7\end{pmatrix}$$

- $B=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{pmatrix}$

formats (1 ; 2) et (2 ; 2)

$$B=\begin{pmatrix}1\times2+3\times(-3) & 1\times1+3\times7\end{pmatrix}$$
$$B=\begin{pmatrix}-7 & 22\end{pmatrix}$$

- $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

formats (2 ; 2) et (2 ; 1)

$$C=\begin{pmatrix}2\times1+3\times(-3)\\0\times2+2\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-6\end{pmatrix}$$

- $D=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{pmatrix}$

formats (2 ; 2) et (2 ; 2)

$$D=\begin{pmatrix}-7 & 22\\-6 & 14\end{pmatrix}$$

- $E=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{pmatrix}$

formats (3 ; 2) et (2 ; 2)

$$E=\begin{pmatrix}1\times2+3\times(-3) & 1\times1+3\times7\\0\times2+2\times(-3) & 0\times1+2\times7\\-2\times2+5\times(-3) & -2\times1+5\times7\end{pmatrix}$$
$$E=\begin{pmatrix}-7 & 22\\-6 & 14\\-19 & 33\end{pmatrix}$$

- $F=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}$

formats (2 ; 2) et (2 ; 2)

$$F=\begin{pmatrix}2\times1+1\times0 & 2\times3+1\times2\\-3\times1+7\times0 & -3\times3+7\times2\end{pmatrix}$$
$$F=\begin{pmatrix}2 & 8\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons le produit AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AB est la matrice carrée nulle d'ordre 2.

$\boxed{5}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Calculons les produits AB et BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Que constate-t-on ?

On constate que $AB \neq BA$.

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

$\boxed{6}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons A^2, A^3, A^4, A^5.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire $A^3 = A \times A^2$ car on a : $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$ (autrement dit les matrices A et A^2 commutent).
De manière générale, pour tout couple $(k\,;l)$ d'entiers naturels, on a $A^k \times A^l = A^l \times A^k$.

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposons une formule pour A^n où n est un entier naturel quelconque.

On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
Cette conjecture peut être démontrée par récurrence.

$\boxed{7}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons A^2, A^3, A^4, A^5.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les puissances de A sont nulles à partir de l'exposant 3.
On dit que la matrice A est nilpotente.

Une matrice dont une puissance est égale à la matrice nulle est appelée nilpotente.

Le 7 décembre 2017

Exercice $\boxed{7}$ un élève m'a écrit cela sur une feuille :

Pour A^n, les diagonales (de gauche vers la droite) se décalent de rangs vers la droite.
Ajoutant alors des diagonales de 0 venant de la gauche.
Il faut avoir une matrice de la forme (3 ; 3) et qu'il y ait plus de diagonales de 0 que de 1.

8 Dans chaque cas, démontrons que A admet B pour matrice inverse.

1°) $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

Donc A est inversible et $A^{-1}=B$.

Remarque :

Selon une propriété du cours (admise), on peut se contenter de vérifier que $AB=I_2$ pour affirmer que la matrice A est inversible. C'est ce que nous ferons dans les autres questions de l'exercice.

2°) $A=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 5\\ 2 & 3 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 5\\ 2 & 3 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

Donc A est inversible et $A^{-1}=B$.

3°) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -4\\ -5 & 3 & 10\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

Donc A est inversible et $A^{-1}=B$.

9

On applique la propriété du cours sur l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels.

A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Lorsque le déterminant de A est non nul, on a : $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

On peut vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

Il existe des matrices non inversibles d'où l'intérêt des questions.

1°) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$\det A=1\times2-2\times3=-4$

On a $\det A\neq0$ donc A est inversible.

$A^{-1}=-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ [on s'arrête là ; il n'y a pas d'intérêt à écrire $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$]

On peut vérifier à la main que le produit de A par A^{-1} à gauche et à droite est égale à la matrice identité d'ordre 2.

2°) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 12 & 6\end{pmatrix}$

$\det A=4\times6-12\times2=24-24=0$

On a $\det A=0$ donc A n'est pas inversible.

3°) $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\det A=0\times1-(-1)\times2=2$

On a $\det A\neq0$ donc A est inversible.

$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\boxed{10}$

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad$ $B=\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}$

1°) **Démontrons que A admet une matrice inverse et calculons son inverse.**

$\det A=3\times4-5\times2=2$

On a $\det A\neq 0$ donc A est inversible.

$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

2°) **Déterminons la matrice carrée X d'ordre 2 telle que $AX=B$ (1).**

Il s'agit d'une équation matricielle.

$(1)\Leftrightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ $\qquad$ lignes surlignées en jaune facultatives, on a le résultat du cours

$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_2}X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow I_2X=A^{-1}B$ $\qquad$ (par propriété du cours, on a : $I_2X=X$)

$\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}18 & 11\\ -\dfrac{41}{2} & -\dfrac{25}{2}\end{pmatrix}$

3°) **Déterminons la matrice carrée Y d'ordre 2 telle que $YA=B$ (2).**

$(2)\Leftrightarrow (YA)A^{-1}=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow Y\underbrace{AA^{-1}}_{I_2}=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow YI_2=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow Y=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}6 & -1\\ \dfrac{7}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

Dans cet exercice, il faut vraiment faire attention à l'ordre dans lequel on multiplie (à gauche ou à droite).

$\boxed{11}$ $\mathbf{A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ x & -6\end{pmatrix}}$ $\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

On commence par effectuer le calcul de A^2 qui nous servira pour tout l'exercice.

$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ x & -6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6 & -4\\ x & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36-4x & 0\\ 0 & 36-4x\end{pmatrix}$

1°) **Déterminons le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (1).**

$(1)\Leftrightarrow \begin{pmatrix}36-4x & 0\\ 0 & 36-4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 36-4x=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{36}{4}$

$\Leftrightarrow x=9$

2°) **Déterminons le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (2).**

$(2)\Leftrightarrow \begin{pmatrix}36-4x & 0\\ 0 & 36-4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 36-4x=-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{37}{4}$

3°) **Déterminons le réel x tel que $A^2=\begin{pmatrix}2001 & 0\\ 0 & 2001\end{pmatrix}$ (3).**

$(3)\Leftrightarrow \begin{pmatrix}36-4x & 0\\ 0 & 36-4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2001 & 0\\ 0 & 2001\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 36-4x=2001$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1965}{4}$

$\boxed{12}$ Déterminons x tel que $\begin{pmatrix} x & 100 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 1010 \\ 110 & 101 \end{pmatrix}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+100x & x+100x \\ x^2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 1010 \\ 110 & 101 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+100x & 101x \\ x^2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 1010 \\ 110 & 101 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+100x=1100 \\ 101x=1010 \\ x^2+x=110 \\ 1+x^2=101 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+100x-1100=0 \\ x=101 \\ x^2+x-110=0 \\ x^2=100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \text{ ou } x=-110 \\ x=10 \\ x=10 \text{ ou } x=-11 \\ x=10 \text{ ou } x=-10 \end{cases}$$

(on résout les équations du second degré $x^2+100x-1100=0$ et $x^2+x-110=0$ à la main ou à la calculatrice)

$$\Leftrightarrow x=10$$

Autre méthode :

On résout l'équation $101x=1010$ qui est équivalente à $x=10$ puis on vérifie que 10 est solution des autres équations.
Cette méthode gagne du temps.

$\boxed{13}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculons AB à l'aide de la calculatrice.

On regarde les formats si l'on veut.
Le produit AB est une matrice carrée d'ordre 2.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{14}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons A^2, A^3 et A^4 à l'aide de la calculatrice.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$.

$\boxed{15}$ Calculons avec la calculatrice l'inverse de chacune des matrices suivantes :

Sur calculatrice TI, rentrer la matrice puis utiliser la touche $\boxed{x^{-1}}$.

Le souci : la calculatrice donne des valeurs approchées.

Utiliser $\boxed{\text{math}}$ → frac pour « convertir » les coefficients en fractions.

Pourquoi la calculatrice double les crochets ?
Je n'ai pas la réponse.

1°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2°) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

La calculatrice donne : $B^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -1{,}5 & 2{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

On peut écrire $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

16

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & ab \\ \dfrac{1}{a} & 0 & b \\ \dfrac{1}{ab} & \dfrac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \qquad (a\,;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$$

1°)

Quand on tape dans dcode, il faut faire attention à bien taper 1/(*ab*).

D'après le site dcode, A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} & \dfrac{ab}{2} \\ \dfrac{1}{2a} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{1}{2ab} & \dfrac{1}{2b} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2°)

On commence par calculer le carré de A.

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & a & ab \\ \dfrac{1}{a} & 2 & b \\ \dfrac{1}{ab} & \dfrac{1}{b} & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite A^2-A.

$$A^2-A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire $A^2-A=2I_3$.

Cette relation peut s'écrire $A\left(A-I_3\right)=2I_3$ ou encore $A\times\dfrac{1}{2}\left(A-I_3\right)=I_3$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\left(A-I_3\right)$.

On achève le calcul de A^{-1} en se rappelant que $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-I_3\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & ab \\ \dfrac{1}{a} & -1 & b \\ \dfrac{1}{ab} & \dfrac{1}{b} & -1 \end{pmatrix}$$

On retrouve l'expression obtenue avec « dcode ».