TS spé

Exercices sur les matrices (généralités)

1 La répartition des élèves d'un lycée est donnée par la matrice de dimension 3×2 ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{Filles} & \text{Garçons} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Externes} \rightarrow \\ \text{Demi-pensionnaires} \rightarrow \\ \text{Internes} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 53 & 28 \\ 249 & 321 \\ 35 & 91 \end{pmatrix} \end{array}$$

1°) Interpréter le coefficient situé à l'intersection de la 3^e^ ligne et de la 2^e^ colonne de cette matrice.
Répondre par une phrase sans justifier.
2°) Écrire une autre matrice traduisant les mêmes indications. Quelle relation existe-t-il entre cette matrice et la précédente ?

2 On souhaite écrire dans une matrice de dimension 12×4 les cours moyens de quatre actions boursières notées A, B, C, D pendant les douze derniers mois.
- Que représentent les nombres de la 5^e^ ligne ?
- Que représentent les nombres de la 2^e^ colonne ?
- Où doit-on écrire le cours moyen de l'action C pendant le 10^e^ mois étudié ?

3 Une entreprise fabrique trois objets notés A, B et C.
Pour fabriquer un objet A, il faut 45 € de matières premières et 76 € de main d'œuvre ; pour un objet B, il faut 27 € de matières premières et 38 € de main d'œuvre ; pour un objet C, il faut 38 € de matières premières et 20 € de main d'œuvre sont nécessaires.
Traduire ces indications par une matrice en indiquant clairement la signification des colonnes et des lignes.

4 On considère les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \; ; \; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -9 & \dfrac{7}{2} \end{pmatrix} \; ; \; \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\dfrac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Écrire pour chacune de ces matrices sa matrice opposée et sa matrice transposée.

5 On considère les matrices suivantes :

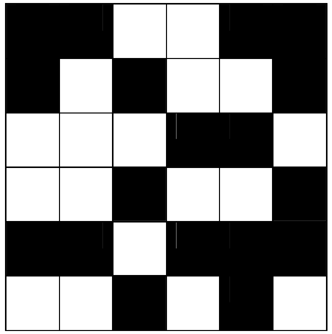
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3a-2b & -5 \\ 4 & 2a+3b \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les réels a et b pour que les matrices A et B soient égales.

6 **Images en noir et blanc**

Une image numérique est constituée de points (pixels). On peut la représenter par une matrice notée $\mathrm{P} = \left(p_{i,\,j}\right)$ où $p_{i,\,j}$ indique la couleur du pixel situé à la ligne i et dans la colonne j.
Pour une image binaire, $p_{i,\,j}$ prendra la valeur 0 (blanc) ou 1 (noir).

1°) Écrire la matrice A correspondant à l'image ci-dessous où chaque case représente un pixel.



2°) Écrire la matrice A' correspondant au négatif de l'image précédente (c'est-à-dire l'image où le blanc devient noir et le noir devient blanc).

7 Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 définie par ses coefficients $a_{i,\,j}$ par la formule : $a_{i,\,j} = 2i + j$.

8 Écrire une fonction Python d'en-tête `def tab(n,p):` qui prend en arguments deux entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à 1 et qui renvoie la matrice de format $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0.
Programmer cette fonction sur calculatrice ou sur ordinateur.

9 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note A la matrice carrée d'ordre n définie par ses coefficients $a_{i,\,j}$ pour $(i\,;\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ par la formule $a_{i,\,j} = 2i + j$.
Écrire une fonction Python d'en-tête `def tab(n):` qui prend en argument un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et qui renvoie la matrice A.

10 Écrire une fonction Python d'en-tête `def id(n):` qui prend en argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la matrice identité d'ordre n (sans utiliser la fonction eye).

Corrigé

$\boxed{1}$

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Filles} & \text{Garçons}\\ \downarrow & \downarrow\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Externes} \rightarrow\\ \text{Demi-pensionnaires} \rightarrow \\ \text{Internes} \rightarrow\end{array} & \begin{pmatrix}53 & 28\\ 249 & 321\\ 35 & 91\end{pmatrix}\end{array}$$

On note $M = \begin{pmatrix}53 & 28\\ 249 & 321\\ 35 & 91\end{pmatrix}$.

1°) **Interprétons le coefficient situé à l’intersection de la 3^e ligne et de la 2^e colonne de cette matrice.**

Le coefficient situé à l’intersection de la 3^e ligne et de la 2^e colonne nous indique que 91 garçons sont internes.

2°)

• **Écrivons une autre matrice traduisant les mêmes indications.**

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc}\text{Ext.} & \text{Demi-p.} & \text{Int.}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array} & \\ \begin{pmatrix}53 & 249 & 35\\ 28 & 321 & 91\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{Filles}\\ \leftarrow \text{Garçons}\end{array}\end{array}$$

Il y a d’autres choix possibles en utilisant un ordre différent pour les externes, les demi-pensionnaires et les internes.

Avec notre choix, on transpose la matrice précédente (voir la question suivante).
On ne parle pas d’inverse. La notion d’inverse d’une matrice sera vue plus tard.

• **Quelle relation existe-t-il entre cette matrice et la précédente ?**

La nouvelle matrice est la transposée de la précédente.

Si on note A la matrice du 1°) et B la matrice du 2°) (avec notre choix), on peut écrire $B = {}^t A$.

$\boxed{2}$ On souhaite écrire dans une matrice de dimension 12×4 les cours moyens de quatre actions boursières notées A, B, C, D pendant les douze derniers mois.

Il n’y a pas à écrire toute la matrice.

• **Que représentent les nombres de la 5^e ligne ?**

Les nombres de la 5^e ligne représentent le cours moyen des 4 actions pendant le mois de mai.

• **Que représentent les nombres de la 2^e colonne ?**

Les nombres de la 2^e colonne représentent le cours moyen de l’action B pendant l’année.

• **Où doit-on écrire le cours moyen de l’action C pendant le 10^e mois étudié ?**

Le cours moyen de l’action C pendant le 10^e mois doit être écrit à l’intersection de la 10^e ligne et de la 3^e colonne.

$\boxed{3}$

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array} & \\ \begin{pmatrix}45 & 27 & 38\\ 76 & 38 & 20\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{Prix des matières premières}\\ \leftarrow \text{Prix de la main d’œuvre}\end{array}\end{array}$$

On n’écrit pas d’unités dans la matrice.

Il y a plusieurs choix possibles.

$\boxed{4}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 2\\ 5 & -1 & 8\end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix}-9 & \dfrac{7}{2}\end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix}6\\ -\dfrac{8}{7}\\ 0\end{pmatrix}$$

Écrivons pour chacune de ces matrices sa matrice opposée et sa matrice transposée.

$$-A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -2\\ -5 & 1 & -8\end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -3 & -1\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

$$-B = \begin{pmatrix}9 & -\dfrac{7}{2}\end{pmatrix} \qquad {}^tB = \begin{pmatrix}-9\\ \dfrac{7}{2}\end{pmatrix}$$

$$-C = \begin{pmatrix}-6\\ \dfrac{8}{7}\\ 0\end{pmatrix} \qquad {}^tC = \begin{pmatrix}6 & -\dfrac{8}{7} & 0\end{pmatrix}$$

On peut vérifier les résultats des transposées à l’aide de la calculatrice.

$\boxed{5}$

$A = \begin{pmatrix} 3a-2b & -5 \\ 4 & 2a+3b \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminons les réels *a* et *b* pour que les matrices A et B soient égales.

On cherche a et b tels que $A = B \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=7 \\ 2a+3b=3 \end{cases} \begin{array}{|c|c|} \times 3 & \times(-2) \\ \times 2 & \times 3 \end{array}$ (méthode des combinaisons linéaires)

1^ère^ colonne de coefficients : On multiplie toute la première équation par 3 et toute la deuxième équation par 2 (membre de gauche et membre de droite) puis on additionne membre à membre.

Cela donne $\begin{cases} 9a-6b=21 \\ 4a+6b=6 \end{cases}$ puis $9a+14a=21+6$ (les b disparaissent).

2^e^ colonne de coefficients : On multiplie toute la première équation par – 2 et toute la deuxième équation par 3 (membre de gauche et membre de droite) puis on additionne membre à membre.

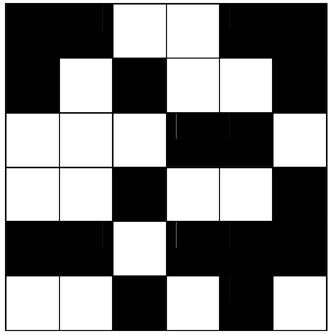
Cela donne $\begin{cases} -6a+4b=-14 \\ 6a+9b=9 \end{cases}$ puis $4b+9b=-14+9$ (les a disparaissent).

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13a=27 \\ 13b=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{27}{13} \\ b=-\dfrac{5}{13} \end{cases}$

On peut aussi résoudre le système à l'aide de la calculatrice (on écrit les deux équations).

$\boxed{6}$ **Images en noir et blanc**



Il peut s'agir d'un QR-code.

1°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice A est une matrice carrée d'ordre 6 (matrice 6×6).

2°) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 définie par ses coefficients $a_{i,j}$ par la formule : $a_{i,j} = 2i + j$.

$A = \begin{pmatrix} 2\times1+1 & 2\times1+2 & 2\times1+3 \\ 2\times2+1 & 2\times2+2 & 2\times2+3 \\ 2\times3+1 & 2\times3+2 & 2\times3+3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

8

```
import numpy as np

def tab(n,p):
    return np.array([[0 for j in range(1,p+1)] for i in range(1,n+1)])
```

On programme la fonction puis on la teste.

9

```
import numpy as np

def tab(n):
    return np.array([[2*i+j for j in range(1,n+1)] for i in range(1,n+1)])
```

On programme la fonction puis on la teste.

10

```
import numpy as np

def t(i,j):
    if i==j:
        return 1
    else:
        return 0

def id(n):
    return np.array([[t(i,j) for j in range(1,n+1)] for i in range(1,n+1)])
```