TS Exercices sur la continuité (3)

1 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-\infty\,;3[$ admettant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		3
Variation de f	-4	↗	$+\infty$ ‖

Démontrer qu'il existe un unique réel appartenant à I dont l'image par f est égale à -2.

2 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	1	↗	2	↘	$-\infty$

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$.

3 On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (\mathrm{E})$ dans $\mathbb{R}$.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - 2x - 1$.

1°) Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$.

2°) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. On indiquera les limites et les extremums de f sur $\mathbb{R}$.

4°) On s'intéresse à l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$. On ne cherchera pas à résoudre (E).

a) Démontrer que l'équation (E) admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de résoudre l'équation).

On sera amené à travailler dans trois intervalles I_1, I_2, I_3.

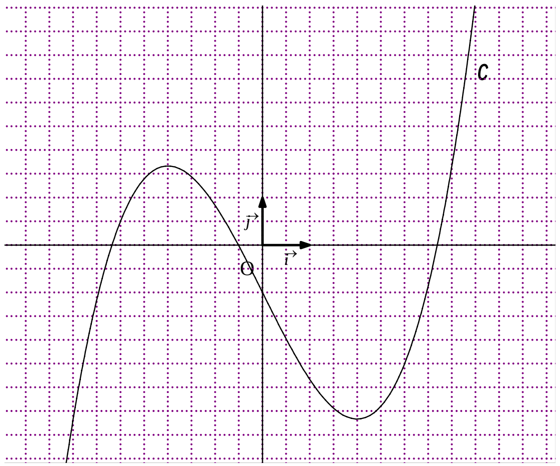
On note α, β, γ ces trois solutions telles que $\alpha < \beta < \gamma$.

Faire figurer ces trois racines dans le tableau de variation en mettant les 0 sur les flèches des variations ; on utilisera des pointillés.

b) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Compléter le graphique ci-dessous en traçant les tangentes horizontales, en indiquant sur les axes les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale et complétant à l'aide de pointillés.

Placer α, β, γ sur le graphique ci-dessous.



À l'aide du graphique, donner un encadrement de α, β, γ par deux entiers consécutifs (donner un encadrement par solution : $\ldots < \alpha < \ldots.$; $\ldots < \beta < \ldots.$; $\ldots < \gamma < \ldots.$).

Justifier ces encadrements par le calcul.

c) Utiliser la calculatrice pour donner des encadrements de α, β, γ d'amplitude 10^{-3}.

5 Recopier et compléter la phrase :

Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, e^x décrit …

Recopier et compléter l'égalité $\exp(\mathbb{R}) = \ldots.$.

6 Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Quelle est la nature de la courbe $\mathcal{C}$ définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{2t-1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$?

Corrigé

$\boxed{1}$

$\mathrm{I} = \left]-\infty\,;3\right[$

x	$-\infty$		x_0		3
Variation de f	-4	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Recopier le tableau de variations.

C_1 : f est continue sur I.

C_2 : f est strictement croissante sur I.

C_3 : -2 appartient à l'intervalle défini par les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition c'est-à-dire $\left]-4\,;+\infty\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, il existe un unique réel appartenant à I dont l'image par f est égale à -2.

Complément :

On peut écrire $f(\mathrm{I}) = \left]-4\,;+\infty\right[$.

Démontrons que l'équation $f(x) = -2$ (1) admet une unique solution dans I.

$1^{\text{ère}}$ rédaction :

f est continue et strictement croissante sur I.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI dans sa forme généralisée, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans I.

2^{e} rédaction :

C_1 : f est continue sur I.

C_2 : f est strictement croissante sur I.

C_3 : -2 appartient à l'intervalle défini par les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition c'est-à-dire $\left]-4\,;+\infty\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, l'équation (1) admet une unique solution dans I.

Complément :

On peut écrire $f(\mathrm{I}) = \left]-4\,;+\infty\right[$.

$\boxed{2}$

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
		Pas de TVI		On utilise le TVI			

Déterminons le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ (E).

Essayer de placer 0 comme valeur intermédiaire sur les flèches.
On voit que l'on ne peut le placer qu'à un seul endroit.

On raisonne intervalle par intervalle (toujours faire une étude intervalle par intervalle).

On pose $\mathrm{I}_1 = \left]-\infty\,;0\right]$ et $\mathrm{I}_2 = \left[0\,;+\infty\right[$ (on prend les deux intervalles fermés, même si l'on pouvait prendre l'un des intervalles ouvert et l'autre fermé).

Si on prend $\mathrm{I}_1 = \left]-\infty\,;0\right[$ et $\mathrm{I}_2 = \left[0\,;+\infty\right[$, alors I_1 et I_2 constituent une partition de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'ils sont non vides, que leur réunion est égale à $\mathbb{R}$ et qu'ils sont disjoints (intersection vide).

• Sur l'intervalle I_1, la fonction f est minorée par 1 (cela signifie que $\forall x \in \mathrm{I}_1 \quad f(x) \geqslant 1$), donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans cet intervalle.

On notera que la fonction f n'admet pas de minimum sur l'intervalle I_1 (1 n'est pas le minimum de la fonction sur l'intervalle I_1 : la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle et la limite de la fonction f en $-\infty$ est 1 ; la valeur 1 n'est donc jamais atteinte).

• Sur l'intervalle I_2, la fonction f est continue et strictement décroissante.
De plus, on a : $f(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (forme généralisée), l'équation (E) admet une unique solution x_0 dans I_2.

Conclusion : L'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Complément :

On peut écrire $f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;2]$.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto x^3 - 3x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminons le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ (E) dans $\mathbb{R}$.

L'équation (E) s'écrit $f(x) = 1$ (c'est la première chose à dire pour « relier » l'équation avec *f*).
Le premier travail est d'essayer de placer 1 comme valeur intermédiaire sur les flèches.
On voit que l'on peut placer 1 à 3 endroits.

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	1	2	1	-2	1	$+\infty$

On peut s'aider d'une représentation graphique si l'on veut mais ce sera seulement une aide.
Il faut ensuite faire une démonstration rigoureuse.
On pose : $\mathrm{I}_1 =]-\infty\,;-1]$; $\mathrm{I}_2 = [-1\,;1]$; $\mathrm{I}_3 = [1\,;+\infty[$ (on prend les trois intervalles fermés).

On applique le corollaire du TVI sur chacun de ces trois intervalles.

L'équation (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Version rédigée :

• *f* est continue et strictement croissante sur I_1.

$\downarrow$

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 2$

Donc d'après le corollaire du TVI (forme généralisée), l'équation (E) admet une unique solution dans I_1.

• *f* est continue et strictement décroissante sur I_2.

$\downarrow$

De plus, $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$.

Donc d'après le corollaire du TVI (forme de base), l'équation (E) admet une unique solution dans I_2.

• *f* est continue et strictement croissante sur I_3.

$\downarrow$

De plus, $f(1) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI (forme généralisée), l'équation (E) admet une unique solution dans I_3.

On en conclut que l'équation (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - 2x - 1$

$f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$

Commentaire général :

f est une fonction polynôme du troisième degré.
L'équation (E) n'admet pas de racine évidente.
On ne peut donc pas factoriser $f(x)$ (factoriser $f(x)$ par *x* n'apporterait rien ; on n'obtiendrait pas un polynôme du second degré !).
On ne sait donc pas résoudre l'équation (E) de manière exacte.
Le but de l'exercice est donc d'effectuer la résolution approchée de (E) (c'est-à-dire de déterminer des valeurs approchées de solutions).

1°) *f* est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme (fonction polynôme du troisième degré, incomplète en x^2).
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} - 2 = \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2}$$

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{6} = -\infty$ (règle du monôme de plus haut degré pour une fonction polynôme non nulle)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{6} = +\infty$

3°) De manière générale, pour étudier les variations d'une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 3, on étudie le signe de la dérivée (il n'y a pas de méthode générale comme pour les fonctions polynômes de degré 2).

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	$-\frac{11}{3}$	↗	$+\infty$

4°) Le premier travail à faire est de placer 0 comme V.I. sur les flèches du tableau de variation.

x	$-\infty$	α	-2	β	2	γ	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0 ↗	$\frac{5}{3}$	↘ 0	$-\frac{11}{3}$	0 ↗	$+\infty$

Une élève (Coline de Gennes) a fait quelque chose de bien : elle a repassé en couleur les parties de la courbe suivant le sens de variation de f : il y a trois parties repassées à l'aide de trois couleurs.

On pose : $I_1 = \left]-\infty\,;-2\right]$; $I_2 = \left[-2\,;2\right]$; $I_3 = \left[2\,;+\infty\right[$ (on ne prend que des intervalles fermés).

> f est continue sur I_1.
> f est strictement croissante sur I_1.
> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-2) = \frac{5}{3}$ (pour une borne ouverte, on calcule la limite ; pour une borne fermée, on calcule l'image).
> Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme généralisée s'applique.
>
> $0 \in \left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right]$
>
> Donc l'équation (E) admet une unique solution (ou racine*) α dans I_1.

* On peut aussi utiliser le mot « racine » car la fonction f est une fonction polynôme.

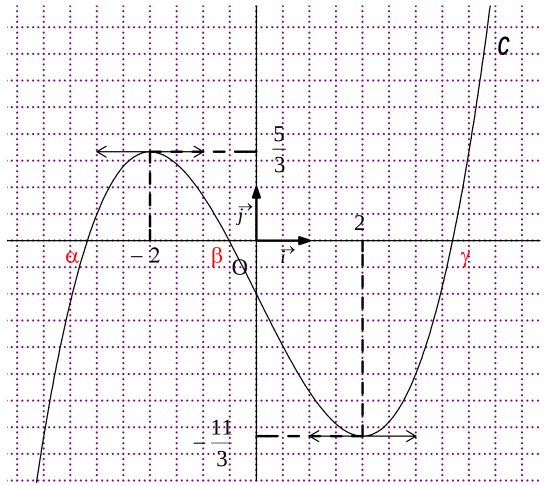
> f est continue sur I_2.
> f est strictement décroissante sur I_2.
> $f(-2) = \frac{5}{3}$ et $f(2) = -\frac{11}{3}$.
> Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme généralisée s'applique.
> $0 \in \left[-\frac{11}{3}\,;\frac{5}{3}\right]$
> Donc l'équation (E) admet une unique solution β dans I_2.

$\frac{5}{3}$

> f est continue sur I_3.
> f est strictement croissante sur I_3.
> $f(2) = -\frac{11}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
> Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme généralisée s'applique.
> $0 \in \left[-\frac{11}{3}\,;+\infty\right[$
> Donc l'équation (E) admet une solution γ dans I_3.

Conclusion : L'équation (E) admet trois solutions distinctes α, β, γ dans $\mathbb{R}$.

N.B. : On peut employer le terme de « racine » car f est une fonction polynôme (si f n'avait pas été polynomiale, on n'aurait pas pu employer ce terme ; on aurait uniquement employé le mot « solution »).



b) Graphiquement, on trouve : $-4 < \alpha < -3$; $-1 < \beta < 0$; $3 < \gamma < 4$.

On dit que l'on a « isolé » (ou que l'on a « localisé ») les zéros (racines) du polynôme.

On déterminer des encadrements des racines d'amplitude 1 c'est-à-dire que l'on a encadré chaque racine par deux entiers relatifs consécutifs.

Ces encadrements sont assez « grossiers ». Le but de la suite sera de déterminer des encadrements plus fins grâce à la méthode de balayage.

On ne peut pas déterminer les valeurs exactes de α, β, γ.

Par le calcul : $f(-4) = -\frac{11}{3}$; $f(-3) = \frac{1}{2}$; $f(-1) = \frac{5}{6}$; $f(0) = -1$; $f(3) = -\frac{5}{2}$; $f(4) = \frac{5}{3}$.

Ces calculs justifie les encadrements par des entiers α, β, γ.

En effet, $f(-4) < 0$ et $f(-3) > 0$ donc $-4 < \alpha < -3$; $f(-1) > 0$ et $f(0) < 0$ donc $-1 < \beta < 0$; $f(3) < 0$ et $f(4) > 0$ donc $3 < \gamma < 4$.

Remarques concernant le graphique :

Pour les extremums, on met les pointillés pour les deux axes : axe des abscisses et axe des ordonnées.

On écrit les barres de fraction horizontalement (et non en oblique).

c) **Méthode de balayage**

Il est important de savoir appliquer la méthode de balayage « à la main » en utilisant une calculatrice juste pour les calculs.

En utilisant la méthode de balayage, on obtient :

$-3,181 < \alpha < -3,180$;

$-0,512 < \beta < -0,511$;

$3,691 < \gamma < 3,692$

Détail du balayage pour α

Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} :

On utilise la calculatrice « Table », on règle le pas de la table à 0,1 (ΔTable = 0,1)

x	– 4	– 3,9	– 3,8	– 3,7	– 3,6	– 3,5	– 3,4	– 3,3	– 3,2	– 3,1	– 3
$f(x)$	– 3,667	– 3,087	– 2,545	– 2,042	– 1,576	– 1,146	– 0,7507	– 0,3895	– 0,613	0,23883	0,5

$-3,2 < \alpha < -3,1$

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

x	– 3,2	– 3,19	– 3,18	– 3,17	– 3,16	– 3,15	– 3,14	– 3,13	– 3,12	– 3,11	– 3,1
$f(x)$	– 0,0613	– 0,0303	0,00043	0,03083	0,06092	0,09069	0,12014	0,149	0,17	0,20	0,23

$-3,19 < \alpha < -3,18$

Encadrement de α d'amplitude 10^{-3} :

x	– 3,19	– 3,189	– 3,188	– 3,187	– 3,186	– 3,185	– 3,184	– 3,183	– 3,182	– 3,181	– 3,18
$f(x)$	– 0,03	– 0,027	– 0,024	– 0,021	– 0,018	– 0,014	– 0,011	– 0,008	– 0,005	– 0,002	0,00043

$-3,181 < \alpha < -3,180$

Détail du balayage pour β

$-1 < \beta < 0$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-1} :

x	– 1	– 0,9	– 0,8	– 0,7	– 0,6	– 0,5	– 0,4	– 0,3	– 0,2	– 0,1	0
$f(x)$	0,8	0,6	0,5	0,3	0,1	– 0,02	– 0,21	– 0,40	– 0,60	– 0,80	– 1

$-0,6 < \beta < -0,5$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-2} :

x	– 0,6	– 0,59	– 0,58	– 0,57	– 0,56	– 0,55	– 0,54	– 0,53	– 0,52	– 0,51	– 0,50
$f(x)$	0,16	0,14	0,12	0,10	0,09	0,07	0,05	0,03	0,01	– 0,002	– 0,02

$-0,52 < \beta < -0,51$

Encadrement de β d'amplitude 10^{-3} :

x	– 0,520	– 0,519	– 0,518	– 0,517	– 0,516	– 0,515	– 0,514	– 0,513	– 0,512	– 0,511	– 0,510
$f(x)$	0,016	0,014	0,012	0,010	0,009	0,007	0,005	0,003	0,001	– 0,00023	– 0,0021

$-0,512 < \beta < -0,511$

Détail du balayage pour γ

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-1} :

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$f(x)$	– 2,5	– 2,2	– 1,9	– 1,6	– 1,2	– 0,8	– 0,4	0,04	0,54	1,08	1,66

$3,6 < \gamma < 3,7$

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-2} :

x	3,6	3,61	3,62	3,63	3,64	3,65	3,66	3,67	3,68	3,69	3,7
$f(x)$	– 0,4	– 0,37	– 0,33	– 0,28	– 0,24	– 0,19	– 0,14	– 0,10	– 0,05	– 0,006	0,04

$3,69 < \gamma < 3,70$

Encadrement de γ d'amplitude 10^{-3} :

x	3,69	3,691	3,692	3,693	3,694	3,695	3,696	3,697	3,698	3,699	3,700
$f(x)$	– 0,006	– 0,001	0,003	0,008	0,013	0,017	0,022	0,027	0,032	0,037	0,042

$3,691 < \gamma < 3,692$

Compléments :

• On pourrait aussi procéder par dichotomie pour déterminer des encadrements de α, β, γ (méthode plus efficace et plus rapide) mais l'énoncé imposait la méthode de balayage.

Il existe d'autres méthodes pour déterminer des valeurs approchées des solutions d'une équation (méthode de Newton ou méthode des tangentes par exemple).

• Avec la calculatrice, on obtient :

$\alpha = -3{,}18014003...$
$\beta = -0{,}51127743...$
$\gamma = 3{,}69126777...$
α, β, γ ne sont pas des nombres fractionnaires
On peut démontrer que α, β, γ sont des nombres irrationnels.

On n'a pas résolu (E) de manière exacte mais on peut dire que l'on a résolu (E) de manière approchée.

• **Formules de Cardan** : chercher sur Internet.

$\boxed{\mathbf{5}}$

Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, e^x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\mathbf{6}}$

$$\mathcal{C}\ \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{2t-1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1°) Tracé sur calculatrice

Sur papier, on peut éventuellement placer des points pour différentes valeurs du paramètre *t*.

2°)

Soit M un point quelconque du plan.
On note $(x\,;y)$ ses coordonnées dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{2t-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{2t} \times \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \ \ x = \mathrm{e}^t \\ y = x^2 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \ \ x = \mathrm{e}^t \\ y = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, e^t décrit $\mathbb{R}_+^*$.

$\mathcal{C}$ est la portion de la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}}$ pour $x > 0$.