TS

Exercices sur les nombres complexes (3)

1 Déterminer une écriture trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_2=-17$; $z_3=5\mathrm{i}$; $z_4=-6\sqrt{3}+6\mathrm{i}$; $z_5=-1-\mathrm{i}$; $z_6=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

2 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$; $z_2=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; $z_3=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3 On pose $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$.

1°) Écrire z sous forme exponentielle.

2°) Calculer z^{10} sous forme algébrique.

4 On pose $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Calculer z^6 sous forme algébrique.

5 Écrire sous forme exponentielle le nombre $z=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$.

6 On pose $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_3=z_1z_2$.

1°) Écrire z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.

2°) Écrire z_3 sous forme exponentielle ; en déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

7 On pose $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^3}$.

Écrire z sous forme algébrique.

8 Soit θ un réel dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z=1+\mathrm{i}\tan\theta$.

9 Soit θ un réel quelconque dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$. On pose $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Calculer $z\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$; en déduire z sous forme exponentielle.

10 Soit θ un réel quelconque. On pose $z_1=\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ et $z_2=\dfrac{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$.

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2.

Dans les exercices **11** à **15**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

11 On considère les points $\mathrm{A}(1+\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(4+5\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(5-2\mathrm{i})$.

Faire un graphique.

Calculer $Z=\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$ sous forme exponentielle.

À l'aide du module et d'un argument de Z, déterminer la nature de ABC.

12 On considère les points $\mathrm{A}\left(-4\sqrt{3}-4\mathrm{i}\right)$, $\mathrm{B}\left(-4\sqrt{3}+6\mathrm{i}\right)$ et $\mathrm{C}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$.

Même question qu'à l'exercice **11**.

13 Déterminer une équation paramétrique complexe du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\mathrm{A}(-1-\mathrm{i})$ et de rayon 5.

14 Quel est l'ensemble E des points M d'affixe $z=1+2\mathrm{i}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$?

15 Quel est l'ensemble E des points M d'affixe $z=1+2\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$?

16 À tout nombre complexe $z\neq-2$, on associe le nombre $Z=\dfrac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}$.

1°) Déterminer pour quelle valeur de z on a $Z=0$.

2°) Soit z un nombre complexe distinct de -2 et de $3-\mathrm{i}$.

On note M son image dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note également A et B les points de P d'affixes respectives -2 et $3-\mathrm{i}$.

Démontrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)=\arg Z\ (2\pi)$.

3°) Déterminer et représenter sur un même graphique (en prenant un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique) :

- l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel ;
- l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

On rappelle que :

$Z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg Z=0\quad(\pi)$; $Z\in(\mathrm{i}\mathbb{R})^*\Leftrightarrow\arg Z=\dfrac{\pi}{2}\quad(\pi)$.

17 1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\sin x\times\sin 2x=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 3x$.

Indication : On écrira $\sin x\times\sin 2x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\times\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2\mathrm{i}}$.

2°) En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

18 1°) Démontrer en utilisant les nombres complexes que pour tout réel x on a $\sin^4 x=\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{8}$.

2°) En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

19 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\cos^3 x\times\sin^2 x=-\dfrac{1}{16}\cos 5x-\dfrac{1}{16}\cos 3x+\dfrac{1}{8}\cos x$.

Autre formulation : Linéariser l'expression $\cos^3 x\times\sin^2 x$.

$\boxed{\textbf{20}}$ On pose $u = 1 + \mathrm{i}$.

1°) Écrire u sous forme exponentielle ; en déduire une écriture exponentielle de $\overline{u}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u^n + \overline{u}^n$.

À l'aide du 1°), démontrer que $S_n = \lambda_n \cos\frac{n\pi}{4}$ où λ_n est un réel que l'on précisera.

3°) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

Corrigé

Les solutions détaillées des exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{5}$ figurent à la fin du document.

$\boxed{1}$ $z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; $z_2=17\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)$; $z_3=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $z_4=12\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;
$z_5=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; $z_6=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

$\boxed{2}$

$z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; $z_3=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Toutes les écritures données ressemblent à des formes mais quand on les regarde de plus près on s'aperçoit que ce ne sont pas des écritures trigonométriques.

Il faut utiliser les formules trigonométriques pour transformer les écritures.

Pour z_1, on utilise les formules $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

On s'arrête là car on a déterminé une écriture trigonométrique de z_1.

Pour z_2, on utilise les formules $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ et $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$.

$$z_2=3\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

On peut aussi écrire : $z_2=3\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

Pour z_3, on utilise les formules $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$z_3=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\boxed{3}$
$z=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$

1°) $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$; 2°) $z^{10}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi=1+\mathrm{i}\times 0=1$

On reste avec la forme exponentielle.
Ensuite, on passe de la forme exponentielle à la forme trigonométrique.

On passe enfin de la forme trigonométrique à la forme algébrique.

$\boxed{4}$ $z^6=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{5}$ Écrire sous forme exponentielle le nombre $z=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$.

Un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$.

Plutôt que d'écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ on écrit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

$z=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ou $z=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$

$\boxed{6}$ 1°) $z_1=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_3=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2°) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{7}$ $\boldsymbol{z=\frac{(1+\mathrm{i})^4}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^3}}$

Écrivons z sous forme algébrique.

Méthode : écrire $1+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ sous forme exponentielle (sinon il y aurait trop de calculs).
On passe par l'écriture exponentielle avant de revenir à la forme algébrique.

$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

On utilise ces deux résultats pour effectuer le calcul de z.

$$z=\frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\frac{-4}{8\times(-\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{2}$$

On remarquera l'utilisation de la « plus belle formule des maths » ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$) lors du calcul du numérateur.

On utilise également $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\mathrm{i}$.

Version un peu plus détaillée :

On pose $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

$r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta_1 \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$r_2 = |z_2| = 2$

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 2\cos\theta_2 \\ -1 = 2\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{{z_1}^4}{{z_2}^3} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{-1}{2(-\mathrm{i})} \quad \left(\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \text{ et } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \mathrm{i}\times(-1) = -\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \end{aligned}$$

On peut aussi faire : $\dfrac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{2} = \dfrac{\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}}{2} = \dfrac{0 + \mathrm{i}\times(-1)}{2} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

$\boxed{8}$

$z = 1 + \mathrm{i}\tan\theta$

Déterminons une écriture exponentielle de z.

La méthode habituelle pour déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe z serait normalement de calculer le module et un argument de z.

On va cependant procéder autrement en transformant l'écriture algébrique de z.

Rappel : $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$z = 1 + \mathrm{i}\tan\theta = 1 + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Or $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta > 0$ d'où $\dfrac{1}{\cos\theta} > 0$.

Par conséquent, l'égalité $z = \dfrac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donne une forme exponentielle du nombre complexe z.

Autre méthode (un peu plus longue, et donc à déconseiller) :

On peut calculer $\sqrt{1 + (\tan\theta)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \dfrac{1}{|\cos\theta|} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

valeurs absolues obligatoires

$\cos\theta > 0$ car $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Version un peu plus détaillée :

Déterminons une écriture exponentielle du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\tan\theta$ $\left(\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.

$$\begin{aligned} z &= 1 + \mathrm{i}\tan\theta \\ &= 1 + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{aligned}$$

Or $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta > 0$ d'où $\dfrac{1}{\cos\theta} > 0$.

$\dfrac{1}{\cos\theta}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est donc bien une forme exponentielle du nombre complexe z.

$\boxed{9}$

Solution :

$\theta \in]-\pi ; \pi[$

$z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Calculons $z\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$; déduisons-en z sous forme exponentielle.

$$z\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}=\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}\quad \text{(formule d'Euler)}$$

On a donc : $z=\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Il faut dire pourquoi $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$.

Or $\theta\in\left]-\pi\,;\pi\right[$ par hypothèse. Donc $\dfrac{\theta}{2}\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ (on peut visualiser le résultat sur le cercle trigonométrique).

On peut donc dire que l'on a déterminé une forme exponentielle de z.

10 $z_1=\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ $\qquad z_2=\dfrac{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$ $\qquad (\theta\in\mathbb{R}$ quelconque$)$

Écrivons sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2.

Pour z_1, on passe par l'écriture trigonométrique. On doit écrire z_1 sous la forme $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$.

$$z_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$z_2=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$$

Autre idée (Joseph Baguenard le lundi 27-1-2019) :

$z_1=\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$

$z_1=\mathrm{i}\left(\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{i}}+\cos\theta\right)$

$z_1=\mathrm{i}\left(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\right)$

$z_1=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

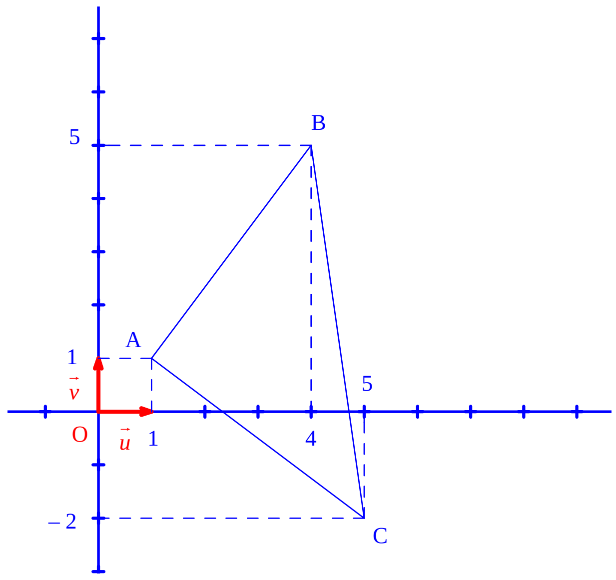
Cette égalité ne donne pas une forme exponentielle car i n'est pas un réel. Dans une écriture exponentielle, on doit toujours avoir un réel strictement positif.

11

$Z=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; ABC est rectangle isocèle en A.

Solution détaillée :

$\mathrm{A}(1+\mathrm{i})\qquad \mathrm{B}(4+5\mathrm{i})\qquad \mathrm{C}(5-2\mathrm{i})$



Faire un graphique comme l'énoncé le demande.
Il serait avise de prendre pour échelle 1 « gros » carreau ou 1 cm.

• Calculons $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ sous forme exponentielle.

Méthode : on commence par calculer la forme algébrique de Z.

$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{5-2\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})}{4+5\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})}=\frac{5-2\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{4+5\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}=\frac{4-3\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(4-3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\frac{12-16\mathrm{i}+12\mathrm{i}^2-9\mathrm{i}}{9+16}=-\frac{25\mathrm{i}}{25}=-\mathrm{i}$$

On peut utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul de Z.

Si on préfère, on peut faire le calcul de z_B-z_A et de z_C-z_A séparément.

Or $-\mathrm{i}=0+\mathrm{i}\times(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ (on peut mettre $-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$)

$Z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

• À l'aide du module et d'un argument de *Z*, déterminons la nature de ABC.

Module de *Z* :

D'une part, $|Z| = \left|e^{-i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$ (car $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\left|e^{i\theta}\right| = 1$)

D'autre part, $|Z| = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{AC}{AB}$

Donc $\dfrac{AC}{AB} = 1$ d'où $AB = AC$.

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A.

Argument de *Z* :

D'une part, $\arg Z = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

D'autre part, $\arg Z = \arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On a donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

Par suite, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Remarques :

• À la fin de l'exercice $\boxed{16}$, nous pouvons ajouter le codage sur la figure (codage de l'angle droit, codage des côtés de même longueur).

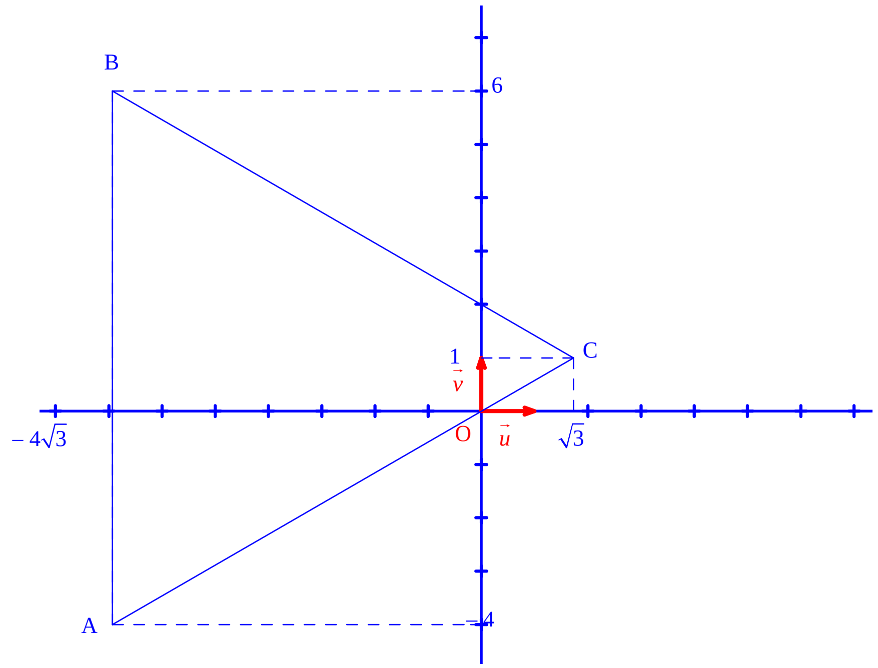
• Il y aurait évidemment une autre méthode pour démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
On pourrait calculer les longueurs des trois côtés (calculs de modules) ce qui permettrait d'obtenir immédiatement que ABC est isocèle en A. On appliquerait ensuite la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
Ce n'est cependant pas cette méthode qui est attendue ici.

$\boxed{12}$

$Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$; ABC est équilatéral.

Solution détaillée :

$A\left(-4\sqrt{3} - 4i\right)$ $B\left(-4\sqrt{3} + 6i\right)$ $C\left(\sqrt{3} + i\right)$



Il serait avisé de prendre pour échelle 1 « gros » carreau ou 1 cm.

On réalise une graphique approché (en utilisant une valeur approchée de $\sqrt{3}$).
La réalisation d'un graphique exact est cependant possible en utilisant la construction exacte d'un segment de longueur $\sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ est un nombre constructible ; comme $3 = 2^2 - 1^2$, il suffit de construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 2 et un côté de l'angle droit a pour longueur 1).

On calcule *Z* d'abord sous forme algébrique puis en forme trigonométrique, et enfin en forme exponentielle.

• Calculons $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ sous forme exponentielle.

$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}+i-\left(-4\sqrt{3}-4i\right)}{-4\sqrt{3}+6i-\left(-4\sqrt{3}-4i\right)}=\frac{5\sqrt{3}+5i}{10i}=\frac{5\left(\sqrt{3}+i\right)}{10i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\times i}{2i\times i}=-\frac{i\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}}\quad \text{(par définition, } e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\text{)}$$

• À l'aide du module et d'un argument de Z, déterminons la nature de ABC.

Module de Z :

D'une part, $|Z|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ (car $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $\left|e^{i\theta}\right|=1$).

D'autre part, $|Z|=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\dfrac{AC}{AB}$.

Donc $\dfrac{AC}{AB}=1$ d'où $AB=AC$.
On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A.

Argument de Z :

D'une part, $\arg Z=\arg e^{-i\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\pi}{3}$ (2π).

D'autre part, $\arg Z=\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ (2π) ce qui permet d'écrire $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$.

On en déduit que le triangle ABC a un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

Conclusion :

Or si un triangle admet un angle géométrique de 60° et deux côtés de même longueur alors ce triangle est équilatéral.
Donc le triangle ABC est équilatéral.

Remarques :

Il y aurait évidemment d'autres méthodes pour démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

• On pourrait calculer les longueurs des trois côtés (calculs de modules) ce qui permettrait d'obtenir immédiatement que ABC est équilatéral.

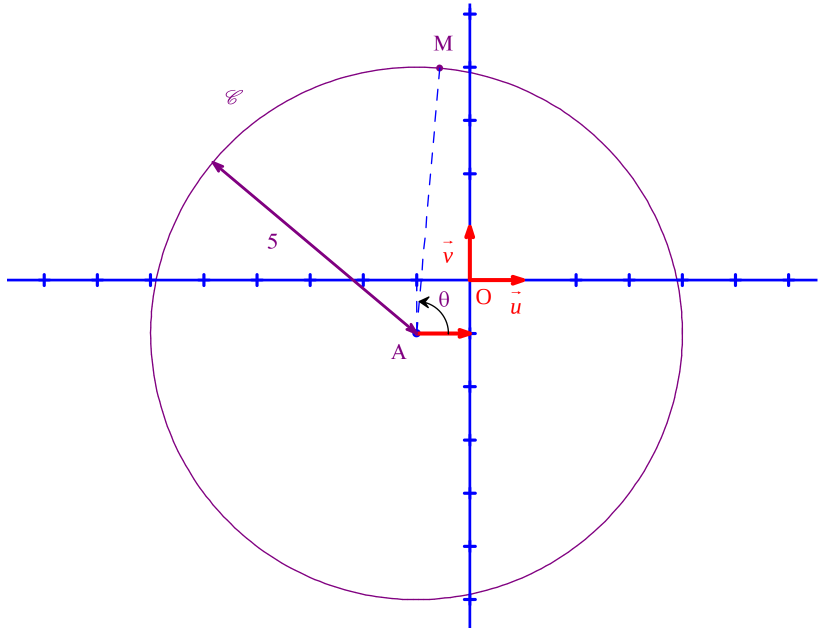
• On pourrait calculer les mesures de deux angles (calculs d'arguments) ce qui permettrait d'obtenir immédiatement que ABC est équilatéral.
Ce n'est cependant pas cette méthode qui est attendue ici.

Ce n'est cependant pas ces méthodes qui sont attendues ici puisque l'énoncé guide différemment.

13 Déterminons une équation paramétrique complexe du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A\left(-1-i\right)$ et de rayon 5.

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation paramétrique complexe $z=-1-i+5e^{i\theta}$ $\left(\theta\in\mathbb{R}\right)$.

On peut faire un graphique.

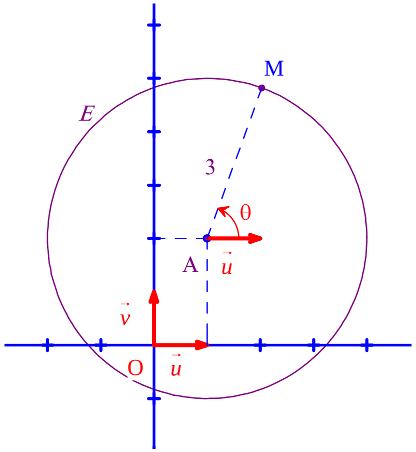


On peut en fait prendre $\theta\in\left[0\,;2\pi\right]$ ou même $\theta\in\left[0\,;2\pi\right[$.

14 **Déterminons l'ensemble *E* des points M d'affixes $z=1+2\mathrm{i}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ lorsque θ décrit ℝ.**

E est le cercle de centre $\mathrm{A}(1+2\mathrm{i})$ et de rayon 3.

On peut faire un graphique.

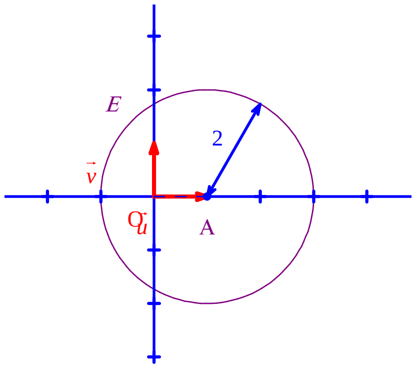


15 **Déterminons l'ensemble *E* des points M d'affixes $z=1+2\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta$ lorsque θ décrit ℝ.**

$$
\begin{aligned}
z &= 1+2\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta \\
&= 1+2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \\
&= 1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}
\end{aligned}
$$

On reconnaît une équation paramétrique complexe de cercle.
Donc *E* est le cercle de centre $\mathrm{A}(1)$ et de rayon 2.

On peut faire un graphique.



16 3°) *E* est la droite (AB) privée du point A ; *F* est le cercle de diamètre [AB] privé du point A.

Solution détaillée :

À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre $Z=\dfrac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}$.

1°) **Déterminons *z* tel que $Z=0$.**

$$Z=0 \Leftrightarrow \frac{z-3+\mathrm{i}}{z+2}=0 \Leftrightarrow z=3-\mathrm{i}$$

2°) $z \neq -2$ et $z \neq 3-\mathrm{i}$

M : image de *z* dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

$\mathrm{A}(-2)$ $\quad$ $\mathrm{B}(3-\mathrm{i})$

Démontrons que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} ; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)=\arg Z \quad (2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
\arg Z &= \arg \frac{z-3+\mathrm{i}}{z+2} \\
&= \arg(z-3+\mathrm{i})-\arg(z+2) \\
&= \arg(z-z_{\mathrm{B}})-\arg(z-z_{\mathrm{A}}) \\
&= \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)-\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \\
&= \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}\right)+\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \quad \text{(relation de Chasles pour les angles orientés)} \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \quad \text{(propriété sur les angles orientés de vecteurs : } \left(-\vec{v}, -\vec{w}\right)=\left(\vec{v}, \vec{w}\right)\text{)}
\end{aligned}
$$

On peut aussi s'y prendre en sens contraire.

3°)

● **Déterminons l'ensemble *E* des points M d'affixe *z* tels que *Z* soit réel.**

$$\boxed{E=\{\mathrm{M}(z)\in P \,/\, Z\in\mathbb{R}\}}$$

On peut déjà dire d'emblée que le point A n'appartient pas à *E*.
En effet, si $\mathrm{M}=\mathrm{A}$ alors $z=-2$. Or *Z* n'est pas défini pour $z=-2$.

Recherche des points de *E* autres que A et B :

Soit M un point du plan distinct de A et B (donc $z \neq -2$ et $z \neq 3-\mathrm{i}$)
Dans ce cas, on sait que *Z* existe et que $Z \neq 0$.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \arg Z = 0 \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ A, B, M sont alignés

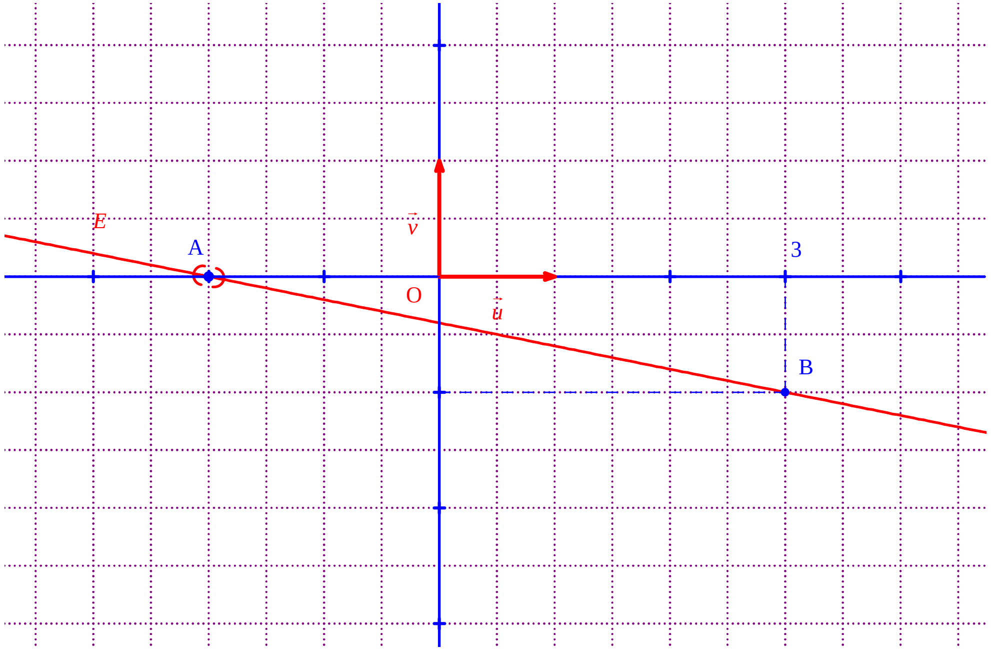
Examen des points particuliers :

Le point B appartient à l'ensemble *E* car pour $z = z_{\mathrm{B}}$, $Z = 0$ qui est réel.

Conclusion :

On rassemble les deux résultats.

E est la droite (AB) privée de A.
On écrit : $E = (\mathrm{AB}) \backslash \{\mathrm{A}\}$.



On exclut le point A de l'ensemble *E* au moyen de deux petits arcs.

● Déterminons l'ensemble *F* des points M d'affixe *z* tels que *Z* soit imaginaire pur.

$\boxed{F = \{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}}$

On peut déjà dire d'emblée que le point A n'appartient pas à *F*.
En effet, si $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ alors $z = -2$. Or *Z* n'est pas défini pour $z = -2$.

Recherche des points de *F* autres que A et B :

Soit M un point du plan distinct de A et B.

Dans ce cas, on sait que *Z* existe et que $Z \neq 0$.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow Z \in (\mathrm{i}\mathbb{R})^*$

$\Leftrightarrow \arg Z = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont orthogonaux

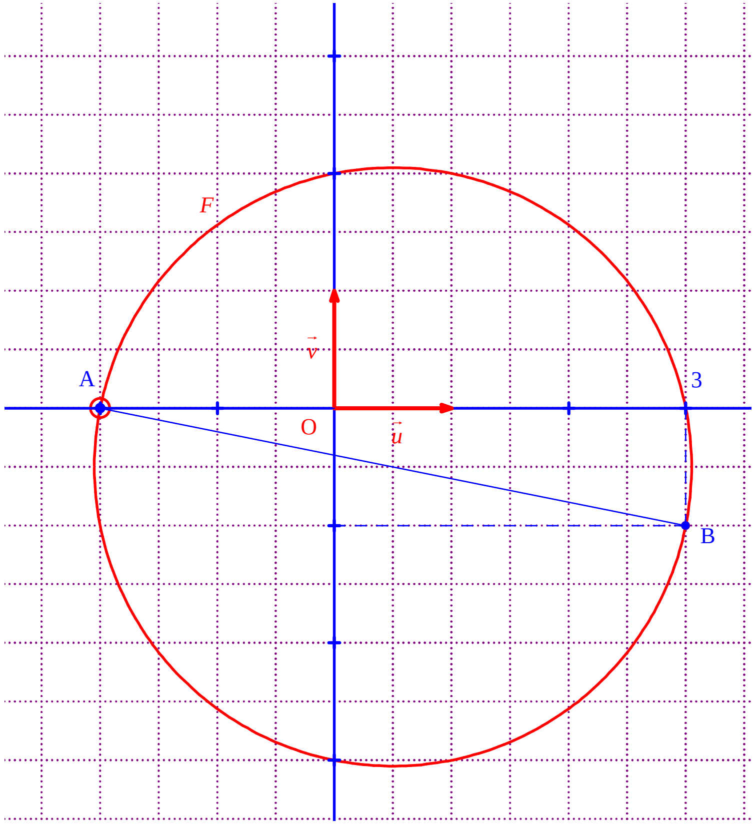
Examen des points particuliers :

Le point B appartient à l'ensemble *F* car pour $z = z_{\mathrm{B}}$, $Z = 0$ qui est imaginaire pur.

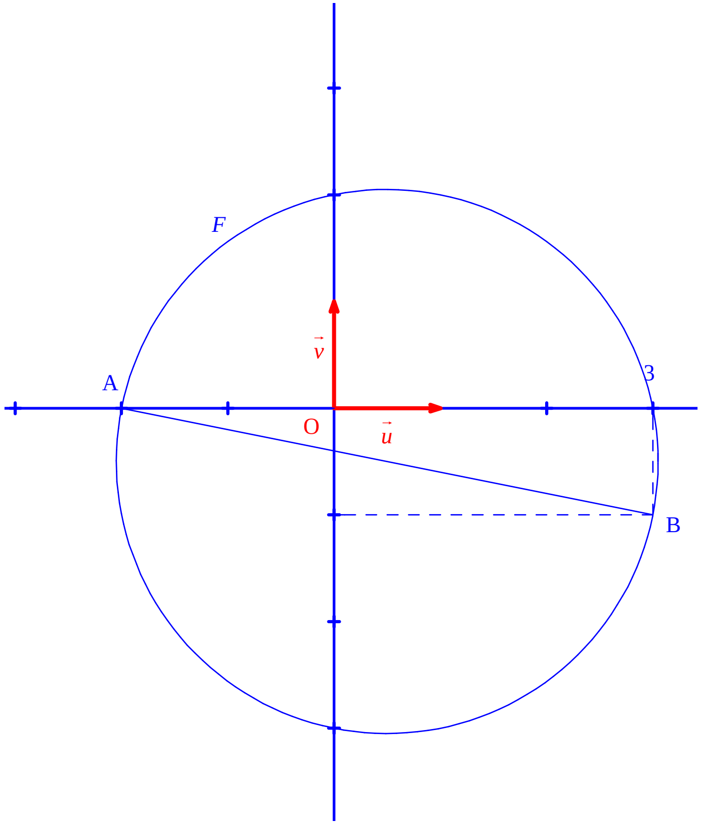
Conclusion :

F est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ privé de A.

Faire un graphique.



On exclut le point A de l'ensemble F au moyen de deux petits arcs.



Caractérisation angulaire d'un cercle :

Dans l'antiquité, Euclide dans son traité « Les Eléments » donne la définition suivante d'un cercle :
« Le cercle de diamètre [AB] est le lieu des points M d'où l'on voit le diamètre sous un angle droit ».
Il est curieux de constater que la définition d'un cercle comme ensemble des points situé à une distance fixe d'un point n'est pas utilisée par les Grecs.

Cette propriété peut être aisément traduite à l'aide des angles orientés.

Dans tout cet exercice, on ne repasse pas en $x+\mathrm{i}y$.

$\boxed{17}$

1°) **Démontrons que pour tout réel x, on a : $\sin x \times \sin 2x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$.**

Formules d'Euler pour le sinus et le cosinus :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{array}}$$

$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$\begin{aligned}\sin x \times \sin 2x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\\ &= \frac{e^{ix}e^{i2x}-e^{ix}e^{-i2x}-e^{-ix}e^{i2x}+e^{-ix}e^{-i2x}}{-4}\\ &= -\frac{e^{i3x}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-i3x}}{4}\\ &= -\frac{\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{4}\\ &= -\frac{2\cos 3x - 2\cos x}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x\end{aligned}$$

2°) **Déduisons-en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \sin 2x \, dx$.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \sin 2x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x\right) dx\\ &= \left[\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{6}\right) - \left(\frac{\sin 0}{2} - \frac{\sin(3\times 0)}{6}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{6}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{18}$ 1°) Utiliser la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal ; il s'agit d'une linéarisation d'expression trigonométrique.

$$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{(2i)^4} = \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{16}$$

On utilise ensuite le triangle de Pascal.

2°) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{8}$

Solution détaillée :

1°) **Développons $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$ ($x \in \mathbb{R}$ quelconque).**

Déduisons-en que $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

On fait le triangle de Pascal.

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Grâce aux coefficients de la dernière ligne, on peut écrire le développement de $(a+b)^4$:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (formule du binôme de Newton).

En remplaçant b par $-b$, on obtient immédiatement $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

$$\sin^4 x = \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$= \frac{\left(e^{ix}\right)^4 - 4\left(e^{ix}\right)^3 e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2 - 4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$= \frac{e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6e^{i0} - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{\left(e^{i4x}+e^{-4ix}\right) - 4\left(e^{i2x}+e^{-2ix}\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos 4x - 4\left(2\cos 2x\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16}$$

$$= \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

Cette dernière égalité donne la forme linéarisée de $\sin^4 x$.

2°) **Déduisons-en $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.**

On utilise la forme linéarisée de $\sin^4 x$ pour déterminer une primitive (il n'est pas possible de le faire directement).

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx$$

$$= \left[\frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8}\right]_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\sin 4\pi}{32} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) - \left(\frac{\sin 0}{32} - \frac{\sin 0}{4} + 0\right)$$

$$= \left(0 - 0 + \frac{3\pi}{8}\right) - \left(0 - 0 + 0\right) \quad *$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{8}}$$

* On peut éventuellement tracer un cercle trigonométrique au brouillon pour lire les valeurs de sin 4π et sin 2π.

19 **Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^3 x \times \sin^2 x = -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$.**

$$\cos^3 x \times \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{8} \times \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2}{-4}$$

$$= -\frac{\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-i3x}\right)\left(e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right)}{32}$$

$$= -\frac{\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right)\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)}{32}$$

$$= -\frac{e^{i3x}e^{2ix} - 2e^{i3x} + e^{i3x}e^{-2ix} + 3e^{ix}e^{2ix} - 6e^{ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + 3e^{-ix}e^{2ix} - 6e^{-ix} + 3e^{-ix}e^{-2ix} + e^{-i3x}e^{2ix} - 2e^{-i3x} + e^{-i3x}e^{-2ix}}{32}$$

$$= -\frac{e^{i5x} - 2e^{i3x} + e^{ix} + 3e^{i3x} - 6e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} - 6e^{-ix} + 3e^{-3ix} + e^{-ix} - 2e^{-i3x} + e^{-i5x}}{32}$$

$$= -\frac{e^{i5x} + e^{-i5x} + e^{i3x} + e^{-i3x} - 2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{32}$$

$$= -\frac{2\cos 5x + 2\cos 3x - 4\cos x}{32}$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$$

On dit qu'on a linéarisé l'expression $\cos^3 x \times \sin^2 x$.

20

$u = 1 + i$

1°) **Écrivons u sous forme exponentielle ; déduisons-en une écriture exponentielle de $\bar{u}$.**

$u = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ (on a préalablement calculé le module de u : $|u| = \sqrt{2}$ avant de le mettre en facteur)

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On en déduit que $\bar{u} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (en effet, d'après le cours, on a : $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel quelconque pour réel ; il n'y a donc pas de nouveau calcul à effectuer).

2°) **$S_n = u^n + \bar{u}^n$** $\quad (n \in \mathbb{N})$

Démontrons que $S_n = \lambda_n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$S_n=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}+\left(\sqrt{2}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{in\frac{\pi}{4}}+e^{-in\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$ (formule d'Euler : $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$)
$$=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

On en déduit que $\boxed{S_n=\lambda_n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$ avec $\lambda_n=2\times\left(\sqrt{2}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}$.

3°) **Déterminons pour quelles valeurs de n on a $S_n=0$ (1).**

$(1) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)=0$ * (en effet $\forall n\in\mathbb{N}\quad \lambda_n\neq 0$)

$(1) \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{4}=\frac{1}{2}+k$ avec $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n=2+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Rappel : $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

* On utilise la règle du produit nul :

« Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul. »

Conclusion :

Les entiers naturels n tels que $S_n=0$ sont les entiers de la forme $2+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Solutions détaillées

1 Écriture trigonométrique de nombres complexes

Rappels :

$z=x+iy \quad (z\neq 0$ et $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

r est le module de z
θ est un argument de z

• $\mathbf{z_1=-\sqrt{3}+i}$ $\quad z_1=-\sqrt{3}+1\times i$

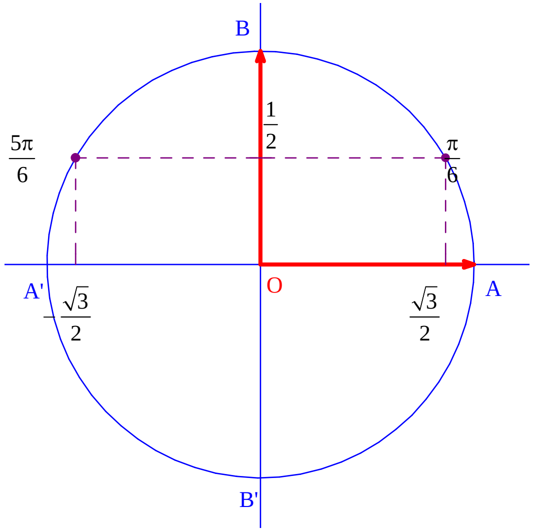
Calcul du module r_1

$r_1=|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

Calcul d'un argument θ_1

On sait que : $\begin{cases}x_1=r_1\cos\theta_1\\ y_1=r_1\sin\theta_1\end{cases}$ (en posant $x_1=\operatorname{Re}z_1=-\sqrt{3}$ et $y_1=\operatorname{Im}z_1=1$).

On a donc $\begin{cases}-\sqrt{3}=2\cos\theta_1\\ 1=2\sin\theta_1\end{cases}$ d'où $\begin{cases}\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$.



On en déduit que $\theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$\boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Autre rédaction (plus sèche) :

$|\ z_1\ | = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

On cherche θ tel que $\begin{cases} -\sqrt{3} = 2\cos\theta \\ 1 = 2\sin\theta \end{cases}$ soit $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$.

On trouve $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

On peut donc écrire : $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Autre rédaction possible :

Soit r_1 le module de z_1.

Soit θ_1 un argument de z_1.

- $\boldsymbol{z_2 = -17}$ $\qquad z_2 = -17 + 0\mathrm{i}$

<u>Calcul du module r_2</u>

$r_2 = |\ z_2\ | = \sqrt{(-17)^2 + 0^2} = 17$

<u>Calcul d'un argument θ_2</u>

On a $\begin{cases} -17 = 17\cos\theta_2 \\ 0 = 17\sin\theta_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \cos\theta_2 = -1 \\ \sin\theta_2 = 0 \end{cases}$.

On en déduit donc que $\theta_2 = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$\boxed{z_2 = 17(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}$$

- $\boldsymbol{z_3 = 5\mathrm{i}}$ $\qquad z_5 = 0 + 5\mathrm{i}$

<u>Calcul du module r_3</u>

$r_3 = |\ z_3\ | = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

<u>Calcul d'un argument θ_3</u>

On a $\begin{cases} 0 = 5\cos\theta_3 \\ 5 = 5\sin\theta_3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_3 = 0 \\ \sin\theta_3 = 1 \end{cases}$.

On en déduit que $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$\boxed{z_3 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

- $\boldsymbol{z_4 = -6\sqrt{3} + 6\mathrm{i}}$

<u>Calcul du module r_4</u>

$r_4 = |\ z_4\ | = \sqrt{\left(-6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{108 + 36} = \sqrt{144} = 12$

<u>Calcul d'un argument θ_4</u>

On a $\begin{cases} -6\sqrt{3} = 12\cos\theta_4 \\ 6 = 12\sin\theta_4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit que $\theta_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{z_4 = 12\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

- $z_5 = -1 - \mathrm{i}$

Calcul du module r_5

$$r_5 = |\ z_5\ | = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument θ_5

On a $\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta_5 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\theta_5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On en déduit que $\theta_5 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$

- $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

Calcul du module r_6

$$r_6 = |\ z_6\ | = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Calcul d'un argument θ_6

On a $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\theta_6 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta_6 \end{cases}$ (voir explication ci-après)

On en déduit que $\theta_6 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{z_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}}$

(autre écriture possible : $z_6 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$)

Complément :

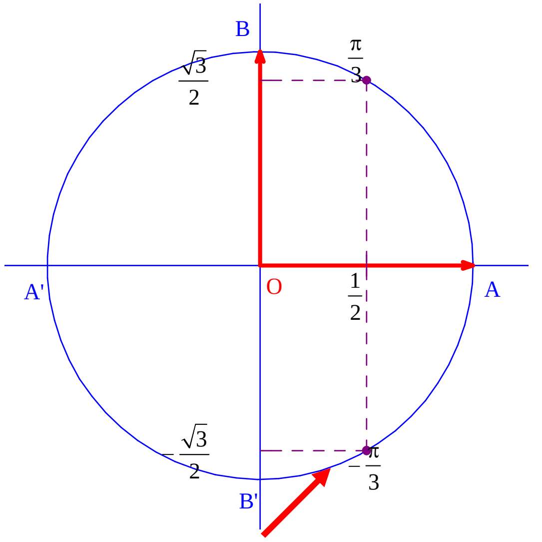
On a $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\theta_6 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta_6 \end{cases}$.

Les deux valeurs qui s'en approchent le plus sont (on regarde dans le tableau des valeurs remarquables) :

$\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mais là, on a le sinus qui est égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On regarde donc sur le cercle trigonométrique.



On peut aussi procéder par la technique de mise en facteur forcée (factorisation forcée par le module, calculé de tête).
Autrement dit, on cache tous les calculs.

$\boxed{2}$ Écriture trigonométrique de nombres complexes

On ne repasse pas par la forme algébrique. Autrement dit, on ne calcule ni les cosinus ni les sinus.

- $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$ n'est pas un écriture trigonométrique à cause du – devant le i.

On sait que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

• $z_2=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ n'est pas un écriture trigonométrique à cause du – devant le 3.

$$z_2=3\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

On sait que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

• $z_3=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

On sait que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$$
$$z_3=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$\boxed{3}$ Forme exponentielle

$$z=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$$

1°) **Forme exponentielle de z**

$$z=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$$

On utilise la formule $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$$z=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

$$\boxed{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}}$$

2°) **Calcul de z^{10}**

On utilise la formule du cours $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

$$z^{10}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{5}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=1$$

$$\begin{aligned}z^{10}&=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{5}}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\\&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Forme exponentielle

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$$

Calculons z^6.

$$z^6=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^6=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{8}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

propriété du cours

définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

$$\begin{aligned}z^6&=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^6\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{8}}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\\&=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

5

6

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = z_1 z_2$

1°) **Écrivons z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.**

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On peut aussi écrire $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ (formes utiles pour le calcul de z_3).

Pour le calcul de z_3 sous forme algébrique, on utilise les formes algébriques trouvée précédemment pour z_1 et z_2.

(On reprend les résultats obtenus précédemment).

$$z_3 = z_1 z_2$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{4}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}$$

Pour ce type de calcul, il serait intéressant d'utiliser une calculatrice faisant du calcul formel ou un logiciel de calcul formel.

2°) **Écrivons z_3 sous forme exponentielle ; déduisons-en $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.**

On utilise les formes exponentielles qui sont données dans l'énoncé pour définir z_1 et z_2.

$$z_3 = z_1 z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$ (propriété sur les exponentielles complexes)

On peut donc écrire $z_3 = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

On reprend le résultat de la question 1°).

En identifiant les parties réelle et imaginaire de z_3 (par unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe), on obtient $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

($\cos\dfrac{\pi}{12} = \operatorname{Re} z_3$ et $\operatorname{Im} z_3 = \sin\dfrac{\pi}{12}$)

Partie réelle de $z_3 = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Partie imaginaire de $z_3 = \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Rappels de formules de trigonométrie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan *x*	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$
$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$\cos a = \cos b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = -b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

$\sin a = \sin b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = \pi - b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$