

Devoir pour le vendredi 8 février 2013

I. N voitures numérotées 1, 2, ..., N sont engagées pour une course. Au dernier moment une voiture tombe en panne et ne prend pas le départ. On sait que la somme des numéros des voitures ayant pris le départ est de 260.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de N et le numéro de la voiture qui n'a pas pris le départ.

1°) Démontrer que N doit être solution de chacune des inéquations suivantes :

a) $\frac{N(N+1)}{2} - N \leq 260$ b) $\frac{N(N+1)}{2} - 1 \geq 260$.

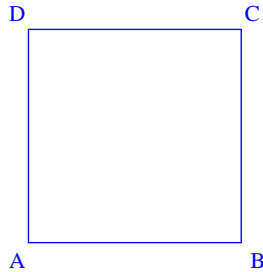
2°) Résoudre ces deux inéquations au moyen d'un logiciel de calcul formel.

3°) En déduire le nombre N de voitures engagées et le numéro de la voiture n'ayant pas pris le départ.

II. Algorithme géométrique

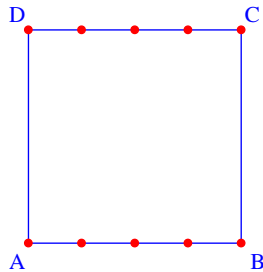
Soit ABCD un carré.

Le but de l'exercice est l'étude d'un algorithme permettant de réaliser une figure dynamique dans ce carré.



On partage les segments [AB] et [CD] en n segments de même longueur où n est un entier naturel avec n ≥ 2.

Ce partage est illustré sur la figure ci-dessous pour n = 4.

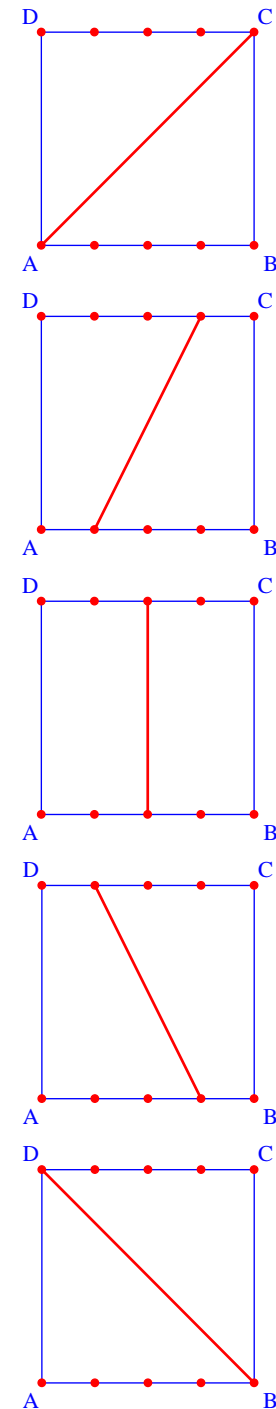


On souhaite que l'utilisateur saisisse une valeur de n en entrée et que s'affichent successivement les figures ci-contre permettant de voir le segment rouge en « animation » (chaque fois le segment s'efface pour laisser place au suivant).

Écrire l'algorithme en langage naturel puis le programme sur calculatrice.

On pourra se placer dans un repère orthonormé dont l'origine coïncide avec A et tel que les points B et D aient pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).

Pour mieux voir, on pourra placer le centre du carré.



Corrigé du DM pour le 8-2-2013

L N voitures numérotées 1, 2, ..., N sont engagées pour une course. Au dernier moment une voiture tombe en panne et ne prend pas le départ. On sait que la somme des numéros des voitures ayant pris le départ est de 260.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de N et le numéro de la voiture qui n'a pas pris le départ.

1°) **Démontrons que N doit être solution de chacune des inéquations suivantes :**

$$\text{a) } \frac{N(N+1)}{2} - N \leq 260$$

$$\text{b) } \frac{N(N+1)}{2} - 1 \geq 260.$$

Soit k le numéro de la voiture en panne.

La somme des numéros de toutes les voitures est égale à $\frac{N(N+1)}{2} = 260 + k$

Or

$$1 \leq k \leq N$$

$$\text{D'où } 260 + 1 \leq 260 + k \leq 260 + N$$

$$\text{Par suite, } 260 + 1 \leq \frac{N(N+1)}{2} \leq 260 + N$$

$$260 + 1 \leq \frac{N(N+1)}{2} \text{ donne } \frac{N(N+1)}{2} - 1 \geq 260.$$

$$\frac{N(N+1)}{2} \leq 260 + N \text{ donne } \frac{N(N+1)}{2} - N \leq 260$$

2°) **Résolvons ces deux inéquations à l'aide d'un logiciel de calcul formel.**

La résolution de l'inéquation $\frac{x(x+1)}{2} - x \leq 260$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel donne

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{2081}}{2}; \frac{1+\sqrt{2081}}{2} \right].$$

$$\text{On aura besoin de } \frac{1-\sqrt{2081}}{2} = -22,3089894... \text{ et } \frac{1+\sqrt{2081}}{2} = 23,3089894...$$

La résolution de l'inéquation $\frac{x(x+1)}{2} - 1 \geq 260$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel donne

$$x \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{2089}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{2089}}{2}; +\infty \right[.$$

$$\text{On aura besoin de } \frac{-1-\sqrt{2089}}{2} = -23,3527897... \text{ et } \frac{-1+\sqrt{2089}}{2} = 22,3527897...$$

3°) **Déduisons-en le nombre N de voitures engagées et le numéro de la voiture n'ayant pas pris le départ.**

On voit qu'il existe un seul entier appartenant à

$$\left[\frac{1-\sqrt{2081}}{2}; \frac{1+\sqrt{2081}}{2} \right] \cap \left(\left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{2089}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{2089}}{2}; +\infty \right[\right) : 23.$$

$$\text{On a : } \frac{23 \times 24}{2} = \frac{552}{2} = 276.$$

$$276 - 260 = 16$$

Donc la voiture en panne est la voiture 16.

II. Animation d'un segment oblique

Entrée :

Saisir n

Traitement et sorties :

h prend la valeur $\frac{1}{n}$

Pour k allant de 0 à n (avec un pas de 1) **Faire**

Tracer le segment horizontal de coefficient 1

Tracer le segment vertical de coefficient 1

Tracer le segment reliant les point de coordonnées $(kh ; 0)$ et $(1 - kh ; 1)$

Effacer dessin

FinPour

Programme sur TI

```
: Effdessin
: Prompt N
: For(I,0,N)
: Horizontale 1
: Verticale 1
: Ligne(I/N,0,1 - I/N,1)
: For(A,1,100)
: End
: Effdessin
: End
```

On ajouté d'une boucle « Pour » (For(A,1,100)) pour ralentir l'animation (« boucle dans le vide »).

Remarque d'Augustin Coudray en AP de mathématiques le 1-2-2013.

« Si l'on trace tous les segments, on dirait un sablier ; c'est assez joli sur la calculatrice car ça fait des nervures. »

On observe une figure en forme de sablier.

