TS1

Devoir pour le mardi 5 février 2013

Le but de l'exercice est d'étudier une méthode d'approximation du nombre π.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On travaille dans le quart de disque limité par l'arc $\overset{\frown}{\text{IJ}}$.

Ce quart de disque a pour aire $\dfrac{\pi}{4}$.

On a partagé le rayon [OI] en 10 segments de même longueur, puis dessiné les rectangles inscrits dans le quart de disque comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On note S_{10} la somme des aires de ces rectangles.
On notera ainsi S_n (n étant un entier naturel supérieur ou égal 2) la somme des aires des rectangles associés à un partage du rayon [OI] en n segments de même longueur.

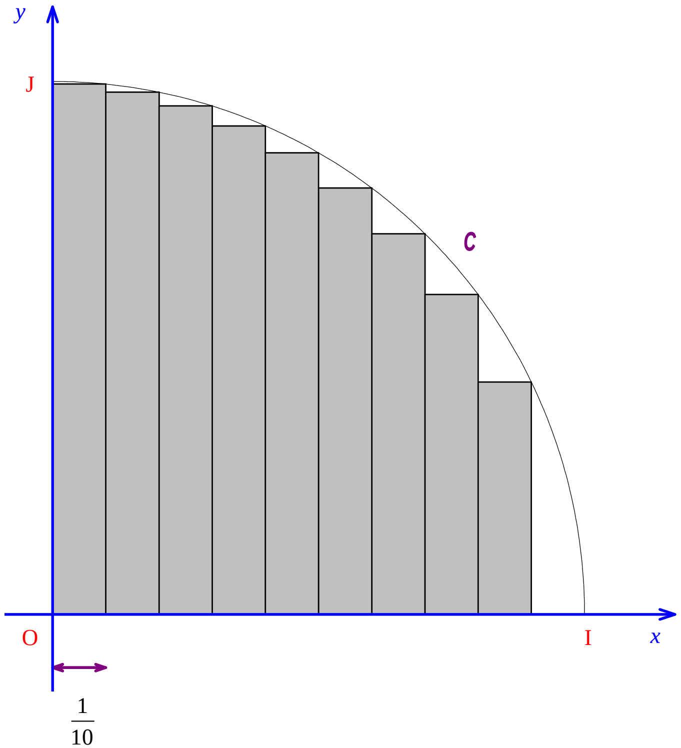

Figure pour n = 10.

1°) Donner sans justifier une équation du cercle $\mathcal{C}$.

2°) Exprimer S_{10} puis calculer la valeur décimale approchée au millième par défaut.

3°) Exprimer S_n en fonction de n.

4°) Écrire un algorithme pour calculer S_n et donner en sortie une valeur approchée de π.

Programmer cet algorithme sur calculatrice et donner la valeur approchée de π obtenue en sortie pour n = 10, n = 100, n = 500.

Corrigé du DM pour le 5-2-2013

1°) **Donnons sans justifier une équation du cercle C.**

C a pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

2°) **Exprimons S_{10} puis calculer la valeur décimale approchée au millième par défaut.**

S_{10} est la somme des aires de 9 rectangles.

Ces rectangles ont tous l'une des deux dimensions égale à $\frac{1}{10}$.

L'autre dimension est variable : $\sqrt{1-\left(\frac{k}{10}\right)^2}$ pour k allant de 1 à 9.

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{10}\sqrt{1-\left(\frac{k}{10}\right)^2}$$

$S_{10} \approx 0{,}726$ (valeur décimale approchée au millième par défaut)

3°) **Exprimons S_n en fonction de n.**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

4°)

Écrivons un algorithme pour calculer S_n et donner en sortie une valeur approchée de π.

Variables :
i, n, S : réels

Initialisation :
S prend la valeur 0

Entrée :
Saisir n

Traitement :
Pour i allant de 1 à $n - 1$ **Faire**
S prend la valeur $S + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$
FinPour

Sortie :
Afficher S
Afficher $4S$

Programmons cet algorithme sur calculatrice et donner la valeur approchée de π obtenue en sortie pour n = 10, n = 100, n = 500.

Pour n = 10, on obtient $S_{10} = 0{,}726...$ (comme obtenu à la question 2°)).

Pour n = 100, on obtient $S_{100} = 0{,}780...$.

Pour n = 500, on obtient $S_{500} = 0{,}784...$.

L'aire du quart de disque est égale à $\frac{\pi}{4}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leqslant \frac{\pi}{4}$ donc $4S_n \leqslant \pi$.

Pour n = 10, on obtient $4S_{10} = 2{,}904...$

Pour n = 100, on obtient $4S_{100} = 3{,}120...$.

Pour n = 500, on obtient $4S_{500} = 3{,}1375...$.

On peut démontrer que (S_n) converge vers π.
Plus n est grand, plus on trouve une valeur approchée par défaut précise de π.

Cela dit, la convergence est très méthode est très lente ; du coup, on n'utilise pas ce genre de méthode pour calculer les décimales de π.