TS

Exercices sur les limites de fonctions par comparaison

1 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x>1$, on a : $\dfrac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3°) Reprendre l'étude pour la limite de f en $-\infty$.

2 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

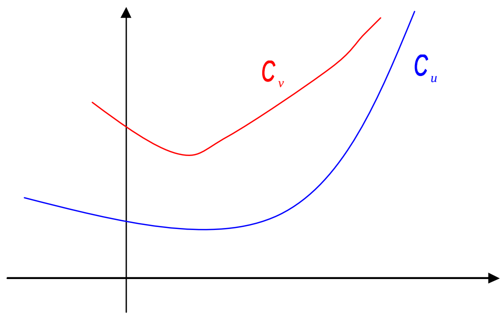
3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait $f(x) \geqslant x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4 Soit u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on ait $u(x) \leqslant v(x)$.

Dans la colonne de gauche, on donne une limite ; compléter l'égalité de limite *lorsque c'est possible*. Ne rien écrire dans la case lorsque ce n'est pas possible.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 3$	$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) =$ ....
$\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 5$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) =$ ....



5 On commencera par lire la partie de cours ci-dessous sur la partie entière d'un rée.

La notion de partie entière a déjà été rencontrée lors de simulations d'expériences aléatoires sur calculatrice ou tableur.

① Définition de la partie entière d'un réel

Pour tout réel x, il existe un unique <u>entier relatif</u> n tel que l'on ait $n \leqslant x < n+1$.
large strict

Cet entier relatif n est appelé **la partie entière** de x.
On le note $\mathbf{E}(x)$.
On a donc : $\mathbf{E}(x) \leqslant x < \mathbf{E}(x)+1$.

② Exemples

- $\mathrm{E}(5,7)=5$ car $5 \leqslant 5,7 < 6$ (la partie entière d'un réel positif correspond à sa troncature[*] à l'unité)
- $\mathrm{E}(-3,6)=-4$ car $-4 \leqslant -3,6 < -3$
- $\mathrm{E}(-2)=-2$ car $-2 \leqslant -2 < -1$ [**]
- $\mathrm{E}(\pi)=3$ car $3 \leqslant \pi < 4$
- $\mathrm{E}(n)=n$ pour $n\in\mathbb{Z}$ car $n \leqslant n < n+1$

Autre formulation :

La partie entière d'un réel *x* est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à *x*.

③ Calculatrice Numworks :

Suivant la mise à jour :

boîte à outils puis suivant la mise à jour :

Nombres décimaux
$\lfloor x \rfloor$: Partie entière par défaut → correspond à la partie entière définie en mathématiques
frac(x) : Partie décimale
$\lceil x \rceil$: Partie entière par excès

1°) La définition de la partie entière dit que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1 \quad (1)$.

À partir de (1), déterminer un encadrement de $\mathrm{E}(x)$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{E}(x)$.

3°) Déterminer un encadrement $\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ pour $x > 0$ puis de $\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ pour $x < 0$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$.

Résumé du cours

	Hypothèses	**Conclusion**	**Commentaires**
Théorème 1 de comparaison (« théorème des gendarmes »)	$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \mathrm{l}$ $h(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \mathrm{l}$ avec $\mathrm{l} \in \mathbb{R}$	$g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \mathrm{l}$	$\mathrm{l} \in \mathbb{R}$ *x* tend vers la même « chose » dans les 3 limites
Théorème 2 de comparaison (« extension du théorème des gendarmes »)	$f(x) \leqslant g(x)$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} +\infty$ $f(x) \leqslant g(x)$ $g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} -\infty$	$g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} +\infty$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} -\infty$	*x* tend vers la même « chose » dans les 2 limites

Corrigé

$\boxed{1}$

1°) Procéder par encadrements successifs en mettant à chaque fois des flèches pour justifier chaque passage. 2°) On applique le théorème des gendarmes ; présenter comme dans l'exemple du cours en introduisant deux fonctions *u* et *v* ; on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (on utilise la limite d'une fonction rationnelle à l'aide des monômes de plus haut degré).

Solution détaillée :

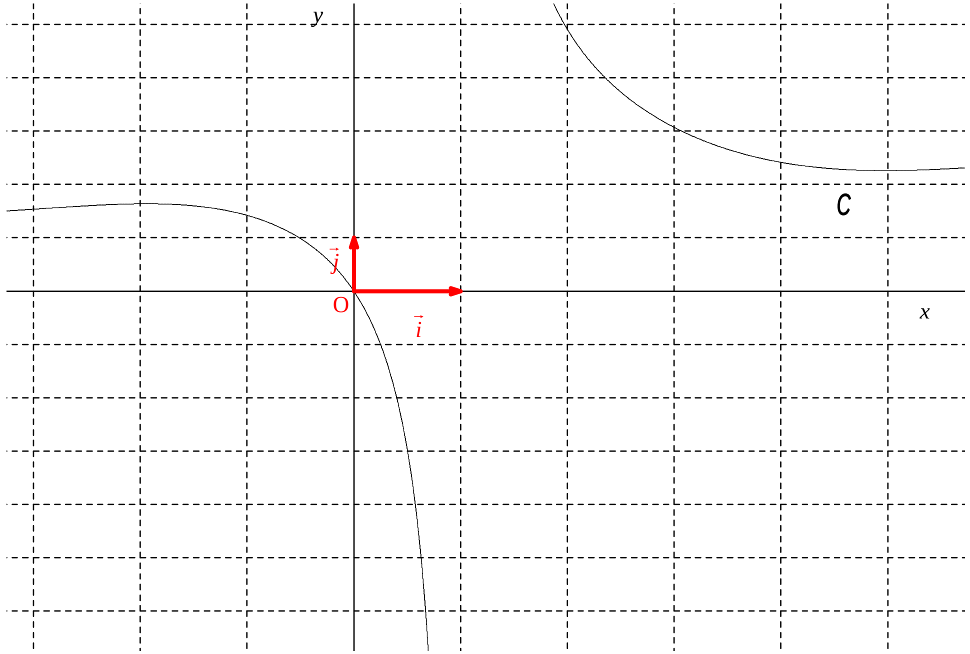
$$f : x \mapsto \frac{2x + \sin x}{x-1}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

On peut remarquer que la fonction *f* n'est pas une fonction rationnelle.

On commence par tracer la représentation graphique sur l'écran de la calculatrice.

Il semble que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de *f* admette la droite d'équation y=2 pour asymptote horizontale en $+\infty$.



1°) **Démontrons que pour tout réel $x>1$, on a : $\dfrac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x-1}$.**

On procède par encadrements successifs en rajoutant les termes.

On fixe un réel quelconque $x>1$.

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\Big\downarrow + 2x$$

$$2x-1 \leqslant 2x+\sin x \leqslant 2x+1$$

$$\Big\downarrow :(x-1) \quad (x-1>0 \text{ car } x>1)$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \leqslant \frac{2x+\sin x}{x-1} \leqslant \frac{2x+1}{x-1}$$

Donc $\forall x>1 \quad \dfrac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2°) **Déduisons-en la limite de f en $+\infty$.**

On pose $u(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ et $v(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

$\forall x>1 \quad u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

On calculer la limite de ce qui encadre. On calcule la limite des « gendarmes ».

Les fonctions u et v sont des fonctions rationnelles non nulles donc pour déterminer leur limite en $+\infty$ on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \; ^* \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \; ^* \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème 1 de comparaison (« théorème des gendarmes » on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

* On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré qui permet de déterminer la limite d'une fonction rationnelle non nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

$\boxed{2}$ **Utilisation de l'extension du théorème des gendarmes**

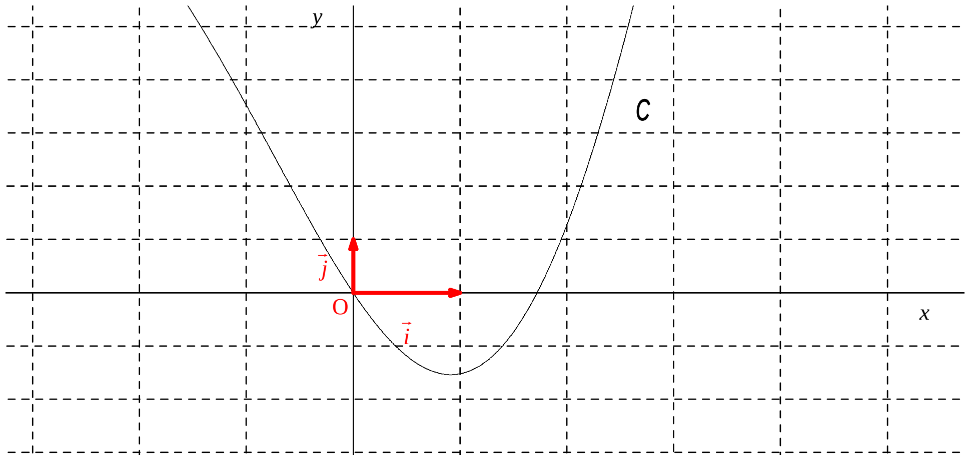
$D_f=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ (limite par comparaison).

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x^2-3\sin x$

$D_f=\mathbb{R}$

Attention, $x^2-3\sin x$ n'est pas un polynôme en x (car $\sin x$ n'est pas un monôme) donc f n'est pas une fonction polynôme.



La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

On procède par inégalités successives.
Il s'agit donc d'une démarche déductive. Par conséquent, on n'utilise pas d'équivalences mais des mots de déduction tels que « donc », « d'où » etc.
On part de l'inégalité $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ valable pour tout réel x. On notera les inégalités larges et non strictes.

Version de recherche

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\Big\downarrow \times(-3)$$

$$3 \geqslant -3\sin x \geqslant -3$$

$$\Big\downarrow +x^2$$

$$x^2+3 \geqslant x^2-3\sin x \geqslant x^2-3$$

$$x^2+3 \geqslant f(x) \geqslant x^2-3$$

On utilise uniquement l'inégalité $f(x) \geqslant x^2 - 3$.

Version au propre (définitive) :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \leqslant 1 \\
&\qquad \times(-3) \\
&-3\sin x \geqslant -3 \\
&\qquad +x^2 \\
&x^2 - 3\sin x \geqslant x^2 - 3 \\
&f(x) \geqslant x^2 - 3
\end{aligned}$$

On pose : $u(x) = x^2 - 3$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant u(x)$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant u(x)$

Donc d'après le théorème <u>d'un seul</u> gendarme, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant u(x)$

Donc d'après le théorème <u>d'un seul</u> gendarme, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Retenir : Quand on a des limites avec des sinus et des cosinus, penser à faire des encadrements.

Autre méthode (à éviter) : On factorise $f(x) = x\left(x - 3\dfrac{\sin x}{x}\right)$ et on utilise $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ qui n'est pas une limite de référence à connaître.

On comprend bien dans cet exercice que le sinus étant borné, la limite est donnée par la limite de x^2.

Dans le supérieur, on verra le théorème suivant, facile à démontrer :

$h(x) = f(x) + g(x)$

① Si g est majorée et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
② Si g est minorée et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

$\boxed{3}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait $f(x) \geqslant x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant x^2$.

Donc d'après le théorème de comparaison 2 (« théorème d'<u>un seul</u> gendarme »), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant x^2$.

Donc d'après le théorème de comparaison 2 (« théorème d'<u>un seul</u> gendarme »), on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Autre version de corrigé :

$\boxed{3}$ **Utilisation de l'extension du théorème des gendarmes**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant x^2$

On applique l'extension du théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Cet exercice permet de comprendre le théorème avec un seul gendarme.

4 Utilisation de l'extension du théorème des gendarmes

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) \leqslant v(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$	On ne peut rien en déduire pour la limite de u en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$	On ne peut rien en déduire pour la limite de v en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = +\infty$	On ne peut rien en déduire pour la limite de u en $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$	On ne peut rien en déduire pour la limite de v en $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 3$	On ne peut rien en déduire pour la limite de v en $+\infty$. Cependant, <u>si v admet une limite en $+\infty$</u>, alors elle est supérieure ou égale à 3 (en incluant le cas où cette limite serait $+\infty$).
$\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 5$	On ne peut rien en déduire pour la limite de u en $+\infty$. Cependant, <u>si u admet une limite en $+\infty$</u>, alors elle est inférieure ou égale à 5 (en incluant le cas où cette limite serait $-\infty$).

Cet exercice permet de comprendre le théorème avec un seul gendarme.

5

1°) Par définition de la partie entière, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$ (1).

Donc $\mathrm{E}(x)+1 > x$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) > x-1$.

2°)

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) > x-1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$.

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(x) = +\infty$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{E}(x) = -\infty$.

3°) D'après (1), $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x$ (*i*) et $x < \mathrm{E}(x)+1$.

Donc $\mathrm{E}(x) > x-1$ (*ii*).

D'où (*i*) et (*ii*) donnent $x-1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} \leqslant \dfrac{x}{x}$ soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} \leqslant 1$ que l'on peut encore écrire .

$1 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} \leqslant 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} = 1$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} = 1$.