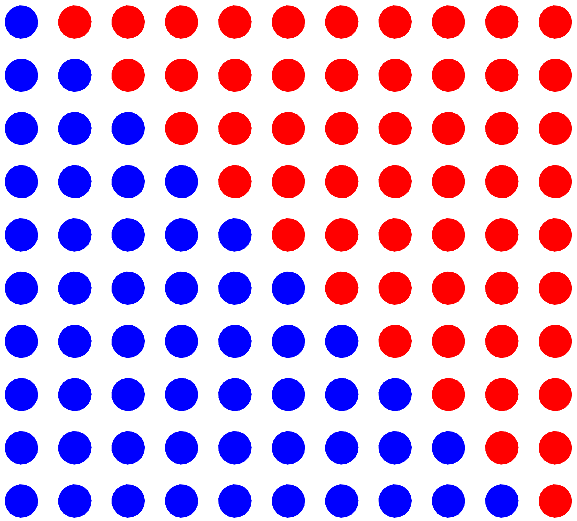
$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 1^{er} février 2013

I. Somme des premiers entiers naturels : démonstration par « preuve sans parole »

1°) On considère la grille rectangulaire ci-dessous dans laquelle sont disposés 1 jeton bleu sur la $1^{\text{ère}}$ ligne, 2 jetons bleus sur la 2^{e} ligne, …, 10 jetons bleus sur la 10^{e} ligne, le reste de la grille étant complété par des jetons rouge comme l'indique la figure.



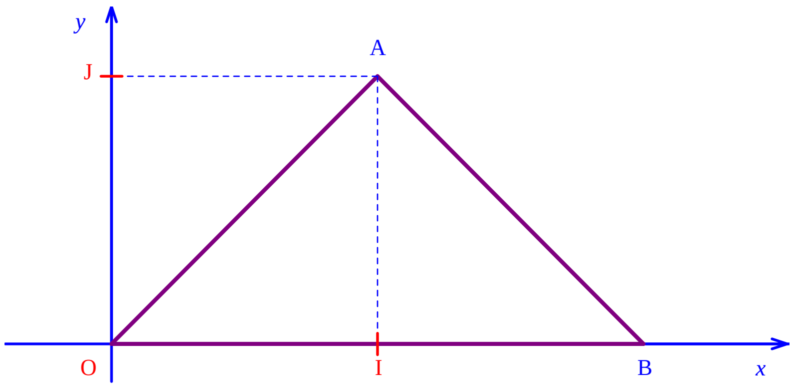
À l'aide de la disposition, calculer rapidement $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10$.

2°) En appliquant la même démarche, simplifier la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On attend une explication succincte.

II. Algorithmes de hachurage d'une zone du plan

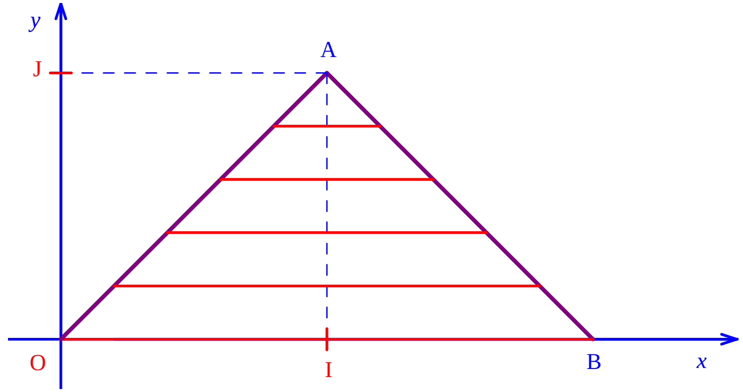
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

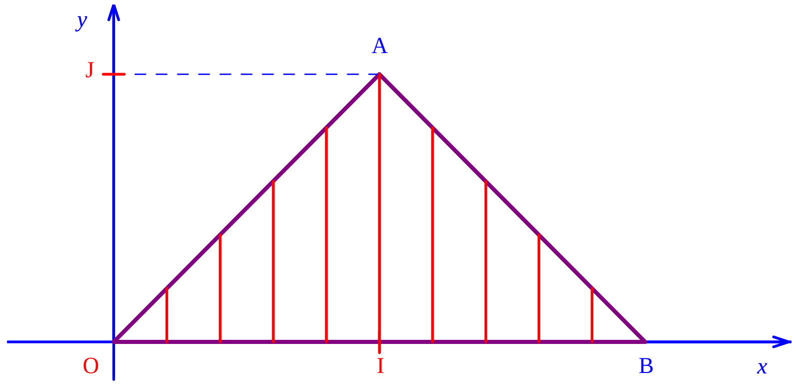
On désire hachurer grâce à des algorithmes l'intérieur du triangle OAB où A et B sont les points de coordonnées respectives (1 ; 1) et B(2 ; 0).

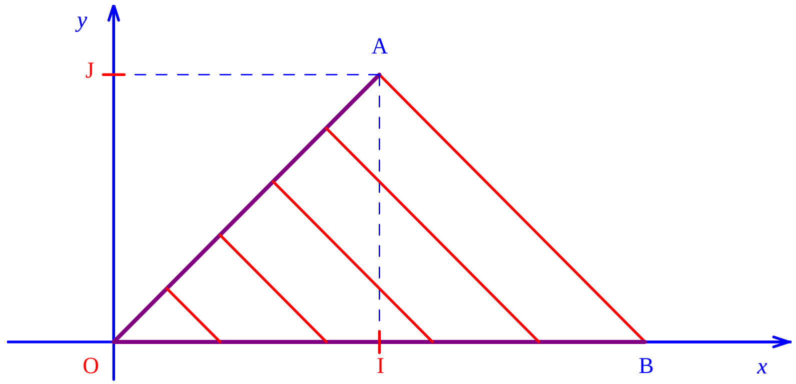


Écrire des algorithmes demandant à l'utilisateur une valeur de n (nombre de hachures, entier naturel supérieur ou égal à 1) afin de réaliser des figures semblables à celles présentées ci-dessous avec hachurage horizontal, vertical, oblique par des segments de coefficient directeur -1 (dans le cas particulier où $n = 5$ pour les figures 1 et 3 et $n = 9$ pour la figure 2). Au début de l'algorithme, on écrira les instructions permettant de tracer le triangle OAB.

Un des côtés du triangle est compté dans les hachures pour le hachurage horizontal et oblique.







Réaliser les programmes correspondants sur calculatrice.

Pour aller plus loin (facultatif) :

Reprendre les questions pour l'intérieur du carré OABC avec C(1 ; – 1).

Corrigé du DM pour le 1-2-2013

I. Somme des premiers entiers naturels : démonstration par « preuve sans parole »

1°) **Calculons $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10$.**

Chaque ligne est composée de 11 jetons.
Il y a 10 lignes.
Donc il y a 110 jetons au total.
On remarque qu'il y a moitié moins de jetons bleus soit 55.

$S = 55$

2°) **Simplifions la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.**

Il y a $\dfrac{10\times(10+1)}{2}$ boules dans le premier exemple.

On généralise le raisonnement.

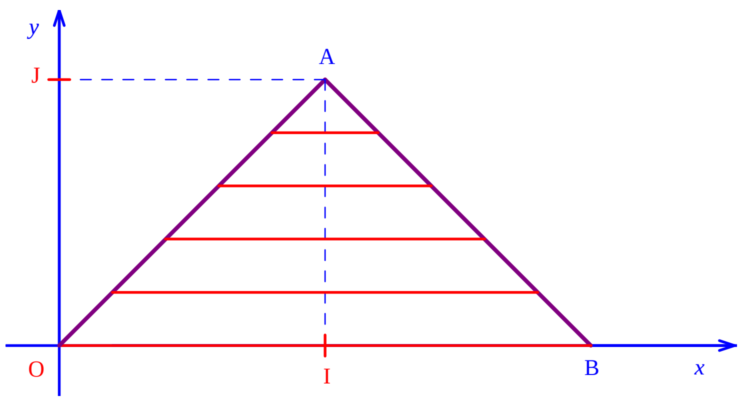
On considère une grille rectangulaire dans laquelle n dispose 1 jeton bleu sur la première ligne, 2 jetons bleus sur la 2e ligne, …, n jetons bleus sur la n-ième ligne, le reste étant complété par des jetons rouges.

Le nombre de jetons de la grille rectangulaire est égal à $n(n + 1)$.

Pour n entier naturel non nul quelconque (entier naturel « supérieur » de la série), la somme de tous les entiers naturels de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

II. Algorithmes de hachurage d'une zone du plan

• Hachurage horizontal :

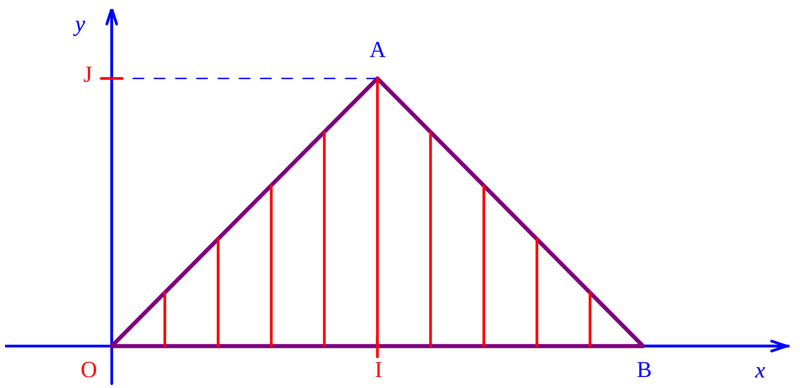


Entrée :
Saisir n

Initialisations :
Effacer le dessin
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (1 ; 1) et (2 ; 0)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; 0)
h prend la valeur $\dfrac{1}{n}$

Traitement et sorties :
Pour k entier naturel allant de 0 à $n - 1$ **Faire**
    Tracer le segment joignant les points de coordonnées (kh ; kh) et ($2 - kh$; kh)
FinPour

• Hachurage vertical :



Le problème est plus délicat que pour le hachurage horizontal.
La difficulté est liée à la forme du domaine triangulaire. Du coup, on peut se poser la question : une boucle ? deux boucles ?

Plusieurs stratégies possibles :

- On fait tracer deux segments à chaque étape de la boucle.

- On s'interroge sur la forme du domaine.

On peut observer que la réunion des segments [OA] et [OB] est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1 - |x - 1|$ ou $\min(x, 2 - x)$ sur $[0 ; 2]$.

On rappelle que pour a et b réels, $\min(a ; b)$ désigne le plus petit des réels a et b.

Avec la première stratégie

Entrée :
Saisir n

Initialisations :
Effacer le dessin
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (1 ; 1) et (2 ; 0)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; 0)
h prend la valeur $\frac{2}{n+1}$

Traitement et sorties :
Pour k allant de 1 à $\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ **Faire**
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (kh ; 0) et (kh ; kh)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées ($2 - kh$; 0) et ($2 - kh$; kh)
FinPour

Avec la deuxième stratégie

Entrée :
Saisir n

Initialisations :
Effacer le dessin
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (1 ; 1) et (2 ; 0)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; 0)
h prend la valeur $\frac{2}{n+1}$

Traitement et sorties :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (kh ; 0) et (kh ; $1 - |kh - 1|$)
FinPour

$kh \leqslant 1$ donne $k \leqslant \frac{1}{h} = \frac{n+1}{2}$ soit $k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$
où E(x) désigne la partie entière d'un réel x.

On rappelle que, par définition, la partie entière d'un réel x désigne le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Ainsi, E(3,78) = 3, E(5) = 5, E(– 2,3) = – 3.

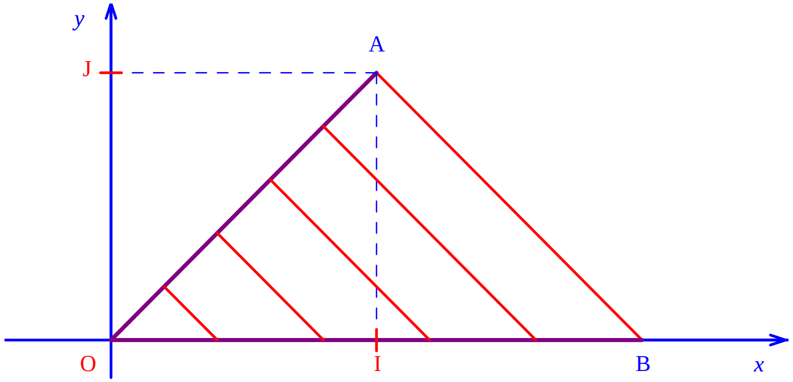
Suivant la parité de l'entier n (c'est-à-dire suivant que n est pair ou impair), il y aura 1 ou 2 segments tracés au « milieu » c'est-à-dire le segment [IA] (si n est impair le segment [IA] sera tracé deux fois).

En effet, si l'on regarde de plus près, on peut envisager deux cas suivant la parité de n.

n pair : n s'écrit sous la forme $n = 2p$ avec p entier naturel non nul.

n impair : n s'écrit sous la forme $n = 2p + 1$ avec p entier naturel.

• **Hachurage oblique (segments obliques de coefficient directeur – 1) :**



Entrée :
Saisir n

Initialisations :
Effacer le dessin
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (1 ; 1) et (2 ; 0)
Tracer le segment joignant les points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; 0)
h prend la valeur $\frac{1}{n}$

Traitement et sorties :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
    Tracer le segment joignant les points de coordonnées (kh ; kh) et ($2kh$; 0)
FinPour