TS1
spécialité

Contrôle du mercredi 23 janvier 2013 (50 minutes)

• Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire, ne rien surligner sur l'énoncé.

• Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

I. (5 points)

On considère l'équation diophantienne $7x + 13y = 1$ (E) avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1°) Recopier et compléter sans justifier la phrase :

« Le couple (… ; …) est une solution particulière de (E). »

2°) Déterminer, en rédigeant complètement, toutes les solutions de (E).

II. (3 points)

Que peut-on dire de l'affirmation « Le PGCD de deux nombres entiers naturels pairs est pair » ?

Justifier la réponse de la manière la plus rigoureuse possible (en faisant une démonstration).

III. (3 points)

Soit n un entier naturel fixé.
On pose $a = 3n + 7$ et $b = 4n + 9$.

Calculer $4a - 3b$. Que peut-on en déduire ?

IV. (6 points)

1°) a) Déterminer le PGCD de 243 et de 495. Répondre en donnant la valeur, sans détailler les calculs.
b) En déduire tous les diviseurs communs positifs à 243 et 495.

2°) Soit a un entier naturel non nul.
En divisant 250 par a, il reste 7 et en divisant 500 par a, il reste 5.
Déterminer la valeur de a.

V. (3 points)

Démontrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\dfrac{n}{n^2+1}$ est irréductible.

Corrigé du contrôle du 23-1-2013

I. $7x + 13y = 1$ (E) avec $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$

1°) Le couple $(2\,;-1)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2°) **Déterminons toutes les solutions de (E).**

(E) $\Leftrightarrow$ $7x+13y=7\times2+13\times(-1)$

$\Leftrightarrow 7(x-2)=-13(y+1)$ (E′)

On en déduit que $7 \mid -13(y+1)$
Or 7 et – 13 sont premiers entre eux.
Donc d'après le théorème de Gauss, $7 \mid y+1$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y+1=7k$ soit $y=-1+7k$.

On remplace $y+1$ par $7k$ dans (E′).

On obtient : $7(x-2)=-13\times7k$

D'où $x=-13k+2$

On vérifie que le couple $(-13k+2\,;-1+7k)$ est solution de (E).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(-13k+2\,;7k-1),\, k\in\mathbb{Z}\}$.

II.

L'affirmation « Le PGCD de deux nombres entiers naturels pairs est pair » est vraie.

En effet, soit a et b deux entiers naturels pairs.

1ère méthode :

On peut écrire $a=2a'$ et $b=2b'$ où a' et b' sont des entiers naturels.

Par suite, $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(2a'\,;2b')$
$=2\,\text{PGCD}(a'\,;b')$

On en déduit que $\text{PGCD}(a\,;b)$ est pair.

2e méthode :

2 est un diviseur commun à a et b.
2 divise donc le PGCD de a et b.
Par conséquent, d est pair.

III.

$n \in \mathbb{N}$

$a = 3n + 7$ $\qquad$ $b = 4n + 9$

$$4a - 3b = 4(3n + 7) - 3(4n + 9)$$
$$= 1$$

$4a - 3b = 1$ donc d'après le théorème de Bezout, on peut dire que a et b sont premiers entre eux.

IV.

1°) a) **Déterminons le PGCD de 243 et de 495.**

PGCD(243 ; 495) = 9

b) **Déduisons-en tous les diviseurs communs positifs à 243 et 495.**

Les diviseurs communs à deux entiers naturels sont les diviseurs de leur PGCD (propriété du cours).

Donc les diviseurs communs à 243 et à 495 sont 1, 3 et 9.

2°) $a \in \mathbb{N}$

Le reste de la division euclidienne de 250 par a est égal à 7.

Le reste de la division euclidienne de 500 par a est égal à 5.

Déterminons la valeur de *a*.

On a :

$250 = aq + 7$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $7 < a$

$500 = aq' + 5$ avec $q' \in \mathbb{N}$ et $5 < a$

Donc $\begin{cases} 250 - 7 = aq \\ 500 - 5 = aq' \end{cases}$

soit $\begin{cases} 243 = aq \\ 495 = aq' \end{cases}$

a est donc un diviseur commun à 243 et 495.

a est donc un diviseur de 9.
Par conséquent, a est égal à 1, 3 ou 9.

Les conditions $5 < a$ et $7 < a$ permettent de dire que $a = 9$.

On effectue sans problème la vérification.

V.

Démontrons que pour tout entier naturel *n*, la fraction $\frac{n}{n^2+1}$ est irréductible.

On a : $1\times\left(n^2+1\right)-n\times n=1$.

Donc d'après le théorème de Bezout, n et n^2+1 sont premiers entre eux.

Par suite, la fraction $\frac{n}{n^2+1}$ est irréductible.

Autre méthode :

$n^2+1=n\times n+1$
$n=n\times 1+0$

(Faux algorithme d'Euclide : l'algorithme d'Euclide marche bien avec des nombres mais marche al avec des expressions littérales car il faut vérifier chaque fois que le reste est bien inférieur au diviseur).

Grâce au lemme d'Euclide, on a :

PGCD(n^2+1 ; n) = PGCD(n ; 1) = 1