1ère S1

# Contrôle du lundi 28 janvier 2013 (30 min)

**Prénom :** ………………………………………..……… **Nom :** …………………… **Note : …. / 20**

---

## I. (6 points)

Pour être sélectionné à un jeu télévisé, un candidat doit satisfaire à deux tests qui sont considérés comme des expériences aléatoires indépendantes. La probabilité de satisfaire chaque test est $p = 0,2$.

1°) Justifier brièvement que cette expérience correspond un schéma de Bernoulli.
2°) Calculer la probabilité qu'un candidat satisfasse aux deux tests.
3°) Calculer la probabilité pour qu'un candidat réussisse au moins un test.

1°) …………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………

2°) …………………………………… (écrire un seul résultat sous forme décimale)

3°) …………………………………… (écrire un seul résultat sous forme décimale)

---

## II. (2 points)

Alain, Bernard et Chloé vont dîner dans une auberge. L'aubergiste leur propose un jeu : tirer au sort la personne qui paiera le dîner. Il leur présente un sachet opaque avec quatre boules indiscernables au toucher dont trois blanches et une noire. Alain tire une boule au hasard. Si elle est noire, Alain paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, il la remet dans le sachet et Bernard tire une boule au hasard. Si elle est noire, Bernard paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, il la remet dans le sachet et Chloé tire une boule au hasard. Si elle est noire, Chloé paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, c'est l'aubergiste qui paie le dîner.
Quelle est la probabilité de l'événement A : « l'aubergiste paie le dîner » ?

……………… (écrire un seul résultat sous forme fractionnaire)

---

## III. (2 points)

Dans une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3, on tire successivement deux boules au hasard avec remise. Déterminer la probabilité que la somme des numéros soit impaire.

……………… (écrire un seul résultat sous forme fractionnaire)

Les exercices **IV** et **V** portent sur des algorithmes de construction (algorithmes géométriques) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pourra, s'il reste du temps, effectuer la programmation sur calculatrice.

---

## IV. (4 points)

Dans chaque cas, on souhaite construire à l'aide d'un algorithme une ligne brisée à partir d'un motif donné composé de segments en appliquant $n$ fois successivement une translation de vecteur $\vec{i}$ ($n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 qui sera demandé à l'utilisateur). La figure comportera donc $n$ motifs.

① **Motif :**

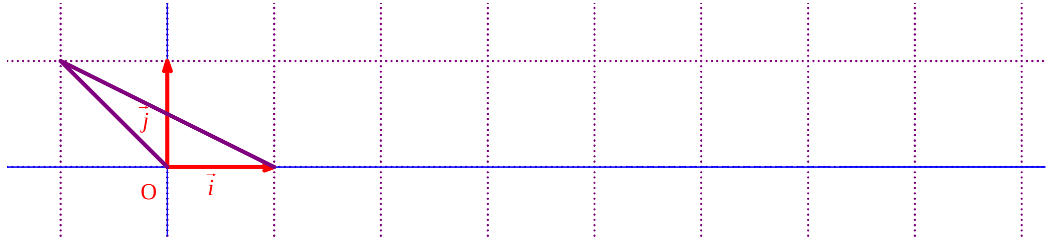
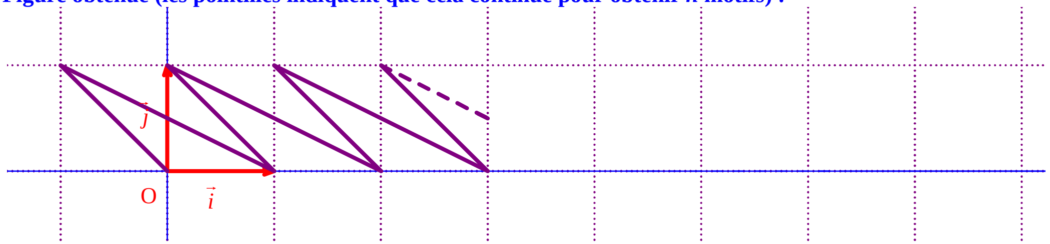



**Figure obtenue (les pointillés indiquent que cela continue pour obtenir *n* motifs) :**




② **Motif :**

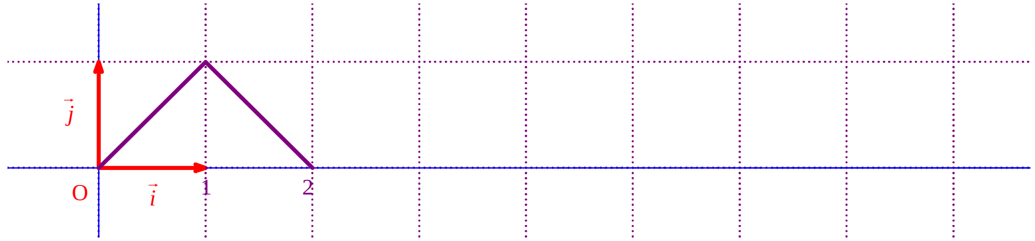
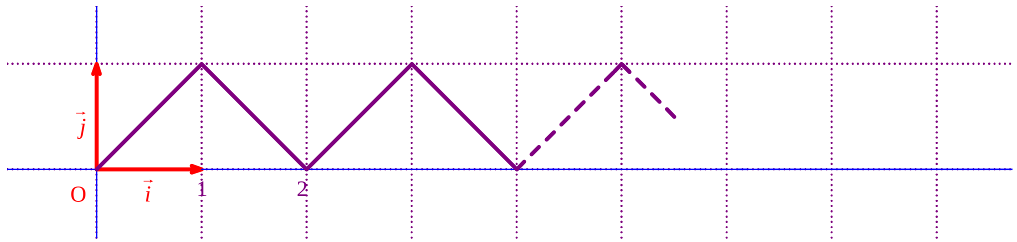



**Figure obtenue :**




Compléter les algorithmes au verso.
On attire l'attention sur le fait que dans le cas ② la variable de boucle $k$ varie avec un pas de 2.

①

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à …..… avec un $\boxed{\text{pas de 1}}$ **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

**FinPour**

②

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à …..… avec un $\boxed{\text{pas de 2}}$ **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

**FinPour**

---

## V. (6 points)

On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
On souhaite réaliser à l'aide d'un algorithme une ligne brisée en forme d'« escalier » joignant les points O et A(1 ; 1) sur le modèle ci-contre, obtenue en subdivisant l'intervalle [0 ; 1] en $n$ intervalles de même longueur ($n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 qui sera demandé à l'utilisateur en entrée).
On précise que le premier segment est porté par l'axe des abscisses.

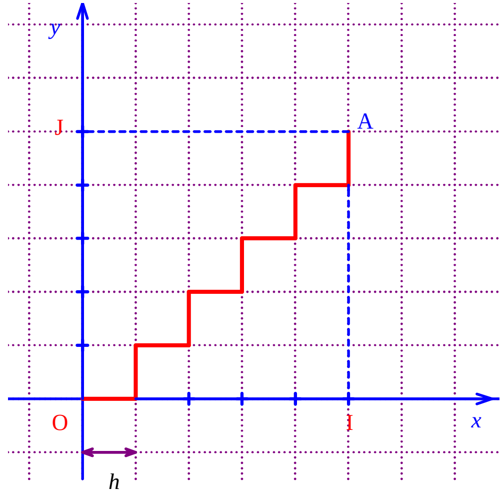



Fig. pour $n = 5$ (dans ce cas, $h = \frac{1}{5}$)

Compléter l'algorithme ci-dessous à l'aide de la variable $h$ dont le contenu est fixé égal à $\frac{1}{n}$ (dans l'exemple de la figure, $h$ a pour valeur $\frac{1}{5}$).

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
$h$ prend la valeur $\frac{1}{n}$
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à …..… avec un pas de 1 **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…..… ; …..…) et (…..… ; …..…)

**FinPour**

On se place dans le cas où $n$ est quelconque, supérieur ou égal à 1.
Quelle est la longueur de l'« escalier » (c'est-à-dire la longueur totale de la ligne brisée) ?
Quand $n$ devient de plus en plus grand, de quelle « ligne » se rapproche l'« escalier » ?
Qu'y a-t-il de curieux ?

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

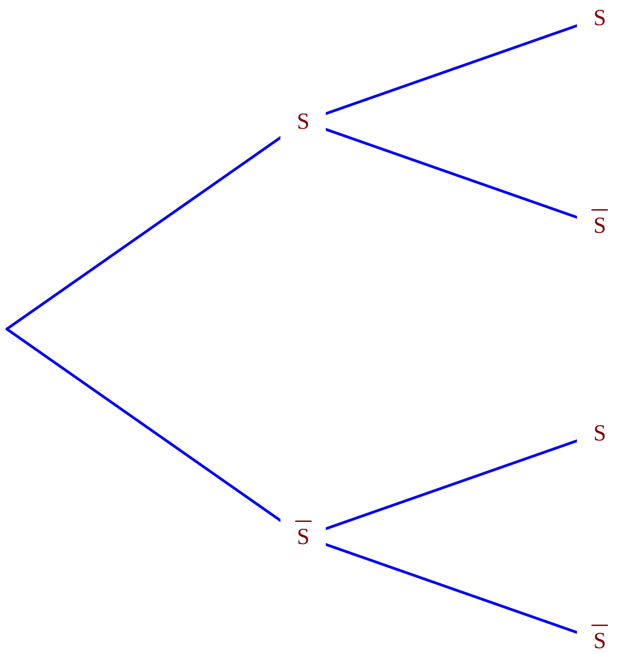
……………………………………………………………………………………………………………………

# Corrigé du contrôle du 28-1-2013

**I.**

1°) Chaque test est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à un succès S : « réussir le test » soit à un échec $\overline{S}$ : « rater le test ».
On répète cette épreuve deux fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

Pour répondre aux questions suivantes, il est intéressant de faire un arbre de Bernoulli.




2°) **Calculons la probabilité qu'un candidat satisfasse aux deux tests.**

Le candidat réussit aux deux tests quand la dernière branche aboutit à S-S.

La probabilité s'obtient en effectuant le produit des probabilités situées sur les branches conduisant à l'extrémité S - S soit $0,2 \times 0,2 =$ **0,04**.

3°) **Calculons la probabilité pour qu'un candidat réussisse au moins un test.**

Le candidat réussit au moins un test, c'est-à-dire un ou deux tests. Les extrémités S-S, S-$\overline{S}$ et $\overline{S}$-S conviennent.
On obtient ainsi la probabilité : $(0,2 \times 0,2) + (0,2 \times 0,8) + (0,8 \times 0,2) =$ **0,36**.

**Autre méthode :**

L'événement contraire est $\overline{S}$-$\overline{S}$ : « échouer aux deux tests » dont la probabilité est $0,8 \times 0,8 = 0,64$.
La probabilité de réussir au moins un test est $1 - 0,64 = 0,36$.

**Méthode :**

Pour calculer la probabilité résultant d'un schéma de Bernoulli :

**1.** On représente la situation par un arbre pondéré.

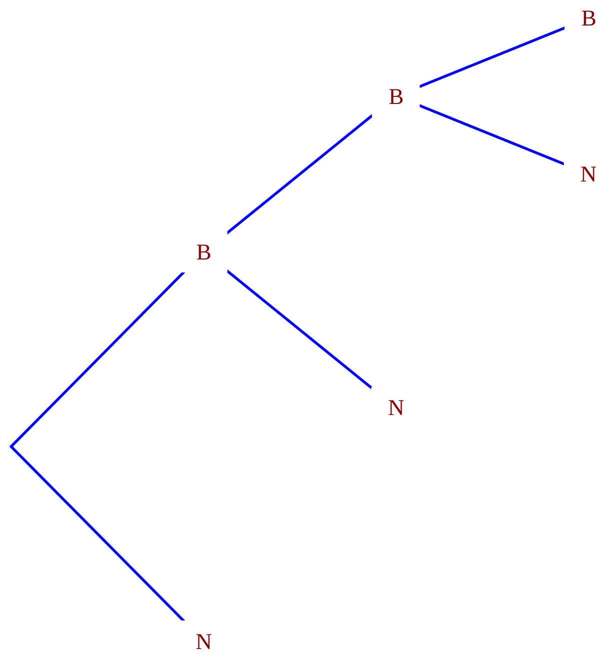
**2.** On calcule la probabilité de l'événement en effectuant le produit des probabilités portées sur les branches du chemin aboutissant à cet événement.

**II.**

Alain, Bernard et Chloé vont dîner dans une auberge. L'aubergiste leur propose un jeu : tirer au sort la personne qui paiera le dîner. Il leur présente un sachet opaque avec quatre boules indiscernables au toucher dont trois blanches et une noire. Alain tire une boule au hasard. Si elle est noire, Alain paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, il la remet dans le sachet et Bernard tire une boule au hasard. Si elle est noire, Bernard paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, il la remet dans le sachet et Chloé tire une boule au hasard. Si elle est noire, Chloé paie le dîner et on arrête les tirages ; sinon, c'est l'aubergiste qui paie le dîner.
Quelle est la probabilité de l'événement A : « l'aubergiste paie le dîner » ?

**Calculons la probabilité de l'événement A : « l'aubergiste paie le dîner ».**

Il faut bien comprendre l'énoncé.
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre.




B : « tirer une boule blanche »

N : « tirer une boule noire »

$P(\mathrm{A}) = P(\text{« Alain, Bernard et Chloé tirent une boule blanche »})$

$= \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{27}{64}$

---

## III.

Dans une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3, on tire successivement deux boules au hasard avec remise.

**Déterminons la probabilité que la somme des numéros soit impaire.**

On peut faire une liste de possibilités ou un arbre.

$P(\text{« la somme des numéros est impaire »}) = P(1-2) + P(2-1) + P(2-3) + P(3-2)$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}$

$= \dfrac{4}{9}$

## IV.

① **Motif :**

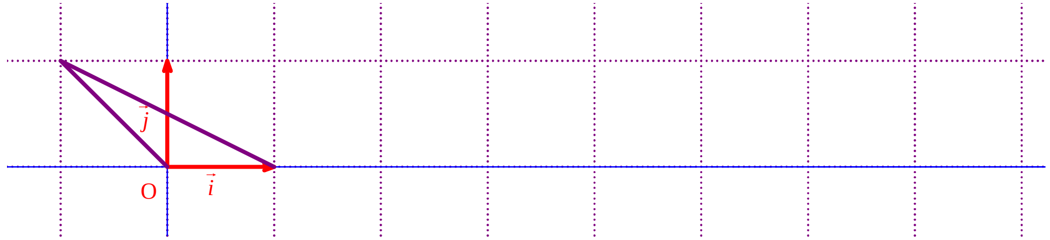
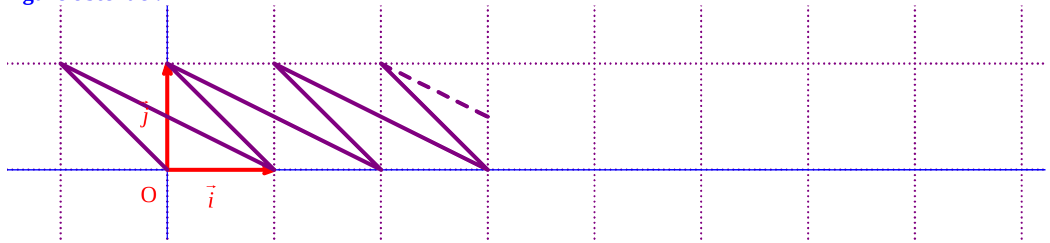



**Figure obtenue :**




Les coordonnées des points se trouvent aisément.

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à $n-1$ * avec un $\boxed{\text{pas de 1}}$ **Faire**

  Tracer le segment joignant les points de coordonnées $(k\ ;\ 0)$ et $(k-1\ ;\ 1)$

  Tracer le segment joignant les points de coordonnées $(k-1\ ;\ 1)$ et $(k+1\ ;\ 0)$

**FinPour**

* On doit bien mettre $n-1$ et non $n$. En effet, si l'on met $n$, alors on aura $n+1$ motifs car il y a $n+1$ entiers naturels de 0 à $n$ (0, 1, 2, …, $n$ ; il ne faut pas oublier que 0 compte pour un).
Or l'énoncé demande $n$ motifs.

Le pas correspond à la « progression ».

② **Motif :**

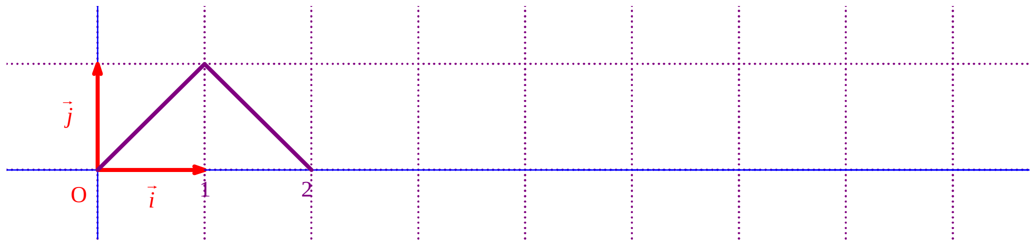
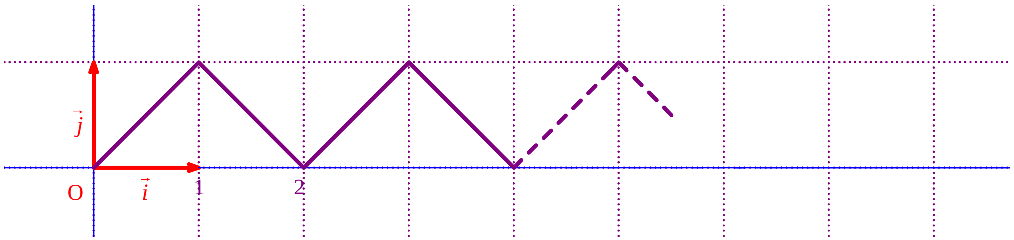



**Figure obtenue :**




**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à **$2n - 2$**** avec un $\boxed{\text{pas de 2}}$ **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (**$k$** ; **0**) et (**$k + 1$** ; **1**)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (**$k + 1$** ; **1**) et (**$k + 2$** ; **0**)

**FinPour**

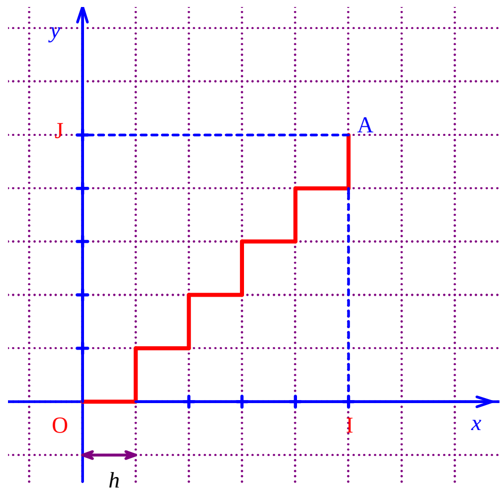
On nous dit que $k$ progresse avec un pas de 2.
Qu'est-ce qu'un pas de 2 ?
Cela signifie que l'on progresse de 2 en 2.
On va donc avoir $k = 0$ (1ère valeur), $k = 2$, $k = 4$ au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme.

** Attention à ce point : c'est bien $2(n-1) = 2n - 2$ (faire des essais pour de petites valeurs de $n$ pour s'en convaincre).

En partant de 0 et en progressant de 2 en 2 jusqu'à $2n - 2$, on aura bien $n$ entiers donc $n$ motifs.

La programmation de ces deux algorithmes sur calculatrice permet leur vérification.

**V.**




L'écriture de l'algorithme nécessitait une bonne réflexion et une bonne analyse de la figure.

**Entrée :**
Saisir $n$

**Traitement et sorties :**
$h$ prend la valeur $\dfrac{1}{n}$
**Pour** $k$ entier naturel allant de 0 à **$n - 1$** avec un pas de 1 **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (**$kh$** ; **$kh$**) et (**$(k + 1)\,h$** ; **$kh$**)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (**$(k + 1)h$** ; **$kh$**) et (**$(k + 1)h$** ; **$(k + 1)h$**)

**FinPour**

On a la « répétition » d'un même motif constitué de deux segments orthogonaux de même longueur.

Les « premiers points » de chaque motif ont pour coordonnées : (0 ; 0), ($h$ ; $h$), ($2h$ ; $2h$), … ($(n-1)h$ ; $(n-1)h$).

On peut observer qu'ils sont tous sur la diagonale du carré OIAJ d'équation $y = x$ (c'est la première bissectrice du repère (O, I, J)). Ils ont tous une ordonnée égale à leur abscisse.

Les « deuxièmes points » de chaque motif ont pour coordonnées : ($h$ ; 0), ($2h$ ; $h$), ($3h$ ; $2h$), … ($nh$ ; $(n-1)h$).

On peut aussi écrire : **$kh + h$ = $(k + 1)h$** (écriture plus simple plutôt que celle adoptée par beaucoup d'élèves).

On se place dans le cas où $n$ est quelconque, supérieur ou égal à 1.

L'une des difficultés – aisément surmontable cependant – tient au fait que les coordonnées des points qui interviennent dans l'algorithme dépendent de deux variables.

**Questions subsidiaires (comptées en bonus) :**

**• Quelle est la longueur de l'« escalier » (c'est-à-dire la longueur totale de la ligne brisée) ?**

**1ère manière :**

La longueur de l'escalier est égale à $2h \times n = 2 \times \frac{1}{n} \times n = 2$ (pour l'unité de longueur choisie).

**2e manière :**

Quelle que soit la valeur de *n*, l'escalier comprendra *n* segments horizontaux dont la longueur totale sera égale à 1 et *n* segments verticaux dont la longueur totale sera égale à 1 aussi.
En additionnant les deux, on obtient une longueur de 2.

La longueur de l'escalier est donc constante égale à 2, qui est indépendante de *n*.

**• Quand *n* devient de plus en plus grand, de quelle « ligne » se rapproche l'« escalier » ?**

Pour répondre à cette question, on peut visualiser ce qui se passe en programmant l'algorithme sur la calculatrice ou bien on le fait comme ça en imaginant ce qui se passe.

Plus *n* devient grand, plus l'« escalier » se rapproche du segment [OA] (diagonale du carré OIAJ).
On évite de dire de la droite (OA).

**• Qu'y a-t-il de curieux ?**

Or $\text{OA} = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$\text{OA} < 2$

Cela est très curieux… fort intrigant !

C'est un paradoxe mathématique. La ligne brisée a une longueur constante de 2 et va se rapprocher d'un segment de longueur plus petite.

Il est intéressant d'effectuer la programmation de cet algorithme sur calculatrice.