1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 10 janvier 2013

I. Une méthode de Blaise Pascal

Soit n est un entier naturel non nul fixé.

1°) On pose $\boldsymbol{S = 1 + 2 + \ldots + n}$. On peut aussi écrire $S = \sum_{k=1}^{k=n} k$.

On se propose de trouver une formule sommatoire pour calculer la somme S, en utilisant une méthode employée par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654.

Il partait de l'égalité :

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Il écrivait les n égalités obtenues pour k prenant toutes les valeurs entières de 1 à n, les unes en dessous des autres, comme dans le cadre ci-dessous :

Pour $k = 1$	$2^2 = 1^2 + 2\times1+1$
Pour $k = 2$	$3^2 = 2^2 + 2\times2+1$
	…………………
Pour $k = n$	$(n+1)^2 = n^2 + 2\times n+1$

Il ajoutait ensuite membre à membre ces n égalités, en observant des simplifications entre deux lignes successives :

n égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{2^2} = 1^2 + 2\times1+1 \\ \cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2\times2+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2\times n+1 \end{array}\right.$$

Il obtenait alors :

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2\times S + n \quad (1).$$

Recopier le dernier cadre en barrant les termes qui s'annulent.
Écrire sans expliquer l'égalité obtenue puis transformer cette égalité pour aboutir à l'égalité (1).
En déduire la formule sommatoire : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

2°) On pose $\boldsymbol{S' = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$. On peut aussi écrire $S' = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

En utilisant la méthode de Pascal, mais en partant de l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, démontrer que $S' = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

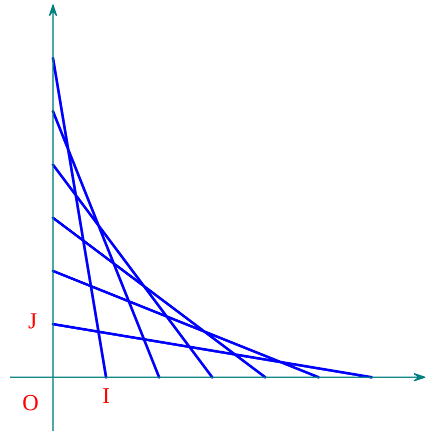
Présenter les calculs dans un cadre comme au 1°), en écrivant les différentes égalités pour k prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n et en barrant les termes qui se simplifient en diagonale.
Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

3°) **Facultatif :**

Calculer $S'' = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en utilisant la méthode de Pascal, mais en partant du développement de $(k+1)^4$.

En déduire que $S'' = S^2$.

II. On considère la figure ci-dessous réalisée dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) *.



1°) a) Écrire en langage naturel un algorithme permettant de réaliser cette figure en respectant les règles de syntaxe usuelles.
b) Écrire le programme correspondant afin de réaliser la figure sur calculatrice (indiquer le modèle de calculatrice).
c) Réaliser le programme sur calculatrice.

2°) a) Modifier l'algorithme précédent afin d'obtenir la même figure avec n segments, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui sera demandé à l'utilisateur en entrée (réécrire complètement l'algorithme).
b) Réaliser le programme correspondant sur calculatrice.
Faire tourner le programme pour différentes valeurs de n.
c) Les droites définies par les segments « définissent » une courbe $\mathcal{C}$ tangente à chacune des droites tracées. On dit que les droites forment l'« enveloppe »** de cette courbe.
Nous admettrons sans démonstration que, pour une valeur de n donnée en entrée, cette courbe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient $x = \dfrac{t^2}{n}$ et $y = \dfrac{(t-n)^2}{n}$ lorsque t décrit l'intervalle $[0 ; n]$.
Tracer $\mathcal{C}$ pour $n = 10$ sur la calculatrice ; pour cela on se placera en mode paramétrique.

* On reconnaîtra une figure que l'on fait souvent faire aux enfants à l'école primaire.

** La théorique des « enveloppes » de droites est étudiée dans l'enseignement supérieur.

Corrigé du devoir du 10-1-2013

I.

1°)

$$\boxed{\begin{array}{c} \cancel{2^2} = 1^2 + 2\times 1 + 1 \\ \cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2\times 2 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2\times n + 1 \end{array}}$$

En additionnant membre à membre toutes les égalités, on remarque que des termes se simplifient.
Le 2^2 de la première ligne se simplifie avec le 2^2 de la deuxième ligne.
Le 3^2 de la deuxième ligne se simplifie avec le 3^2 de la troisième ligne.

Dans le membre de gauche, il reste $(n+1)^2$ qui ne se simplifie pas car il est dans la dernière égalité (il n'y a pas d'égalité ensuite).
Dans le membre de droite, il reste 1^2 et d'autres termes.
En regroupant les termes qui ont la même fonction dans chaque égalité, on obtient :

$$(n+1)^2 = 1^2 + (2\times 1 + 2\times 2 + \ldots + 2\times n) + \left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}}\right)$$

On peut aussi écrire directement l'égalité suivante en utilisant le symbole Σ :

$$\boxed{(n+1)^2 = 1^2 + 2\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right) + n}$$

soit

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2\times S + 1\times n$$

soit

$$n^2 + 2n \cancel{+1} = \cancel{1} + 2\times S + n$$

Donc

$$n^2 + n = 2\times S$$

Soit

$$S = \frac{n^2+n}{2}$$

D'où finalement :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2°)

$$\boxed{n \text{ égalités} \left\{ \begin{array}{c} \cancel{2^3} = 1^3 + 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1 \\ \cancel{3^3} = \cancel{2^3} + 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^3 = \cancel{n^3} + 3\times n^2 + 3\times n + 1 \end{array}\right.}$$

On obtient :

$$(n+1)^3 = 1^3 + (3\times 1^2 + 3\times 2^2 + \ldots + 3\times n^2) + (3\times 1 + 3\times 2 + \ldots + 3\times n) + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$$

On peut aussi écrire l'égalité suivante :

$$\boxed{(n+1)^3 = 1^3 + 3\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right) + 3\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2\right) + n}$$

soit

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\,S' + 3\,S + n$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,S' + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^3 = 3\,S' + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = 3\,S'$$

$$3\,S' = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2}$$

$$6\,S' = (n+1)\left[2(n+1)^2 - 3n - 2\right]$$

$$6\,S' = (n+1)\left[2(n^2+2n+1) - 3n - 2\right]$$

$$6\,S' = (n+1)(2n^2+n)$$

$$6\,S' = (n+1)n(2n+1)$$

On en déduit que :

$$S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3°)

Pour $k = 1$	$2^4 = 1^4 + 4\times1^3 + 6\times1^2 + 4\times1 + 1$
Pour $k = 2$	$3^4 = 2^4 + 4\times2^3 + 6\times2^2 + 4\times2 + 1$
	…………………
Pour $k = n$	$(n+1)^4 = n^4 + 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1$

En additionnant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\times\sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 6\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\times\sum_{k=1}^{k=n} k + n$$

Cette égalité donne successivement les égalités :

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\,S'' + 6\times S' + 4\times S + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = 1^4 + 4\,S'' + 2n\,(n+1)(2n+1) + 2n\,(n+1) + n$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\,S''$$

$$S'' = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$S'' = \frac{n^2\left(n^2 + 2n + 1\right)}{4}$$

$$S'' = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S'' = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Donc $S'' = S^2$.

Complément :

Il est intéressant de consulter le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal accessible en ligne sur Internet dans sa version imprimée originale rédigée en français du XVII^e siècle.
On y voit notamment des expressions mathématiques anciennes, à une époque où le langage mathématique était moins développé qu'aujourd'hui. Par exemple, Pascal pour parler d'une expression à la puissance 4 emploie l'expression « quarré-quarré ».

II. Algorithme avec boucle « Pour »

Il s'agit d'un algorithme d'origine géométrique permettant de réaliser une construction itérative.

1°)

a)

Traitement et sortie :
Pour k entier naturel allant de **1** à **6** (avec un pas de 1) **Faire**
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (**k** ; **0**) et (**0** ; **7 – k**)
FinPour

b) Modèle TI 83 +

```
: EffDessin
: For (K,1,6)
: Ligne(K,0,0,7 – K)
: End
```

2°)

Entrée :
Saisir n

Traitement et sortie :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
    Tracer le segment reliant les points de coordonnées (k ; 0) et (0 ; n + 1 – k)
FinPour

```
: Prompt N
: For (K,1,N)
: Ligne(K,0,0,N + 1 – K)
: End
```

Sur la calculatrice, on a le temps de voir le dessin s'effectuer.

Pour aller plus loin : enveloppe de droites

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{n-t}=1 \\ -\dfrac{x}{t^2}+\dfrac{y}{(n-t)^2}=0 \end{cases}$$

$$(n-t)^2 x = t^2 y$$

$$\frac{(n-t)^2 x}{t}+(n-t)y=(n-t)^2$$

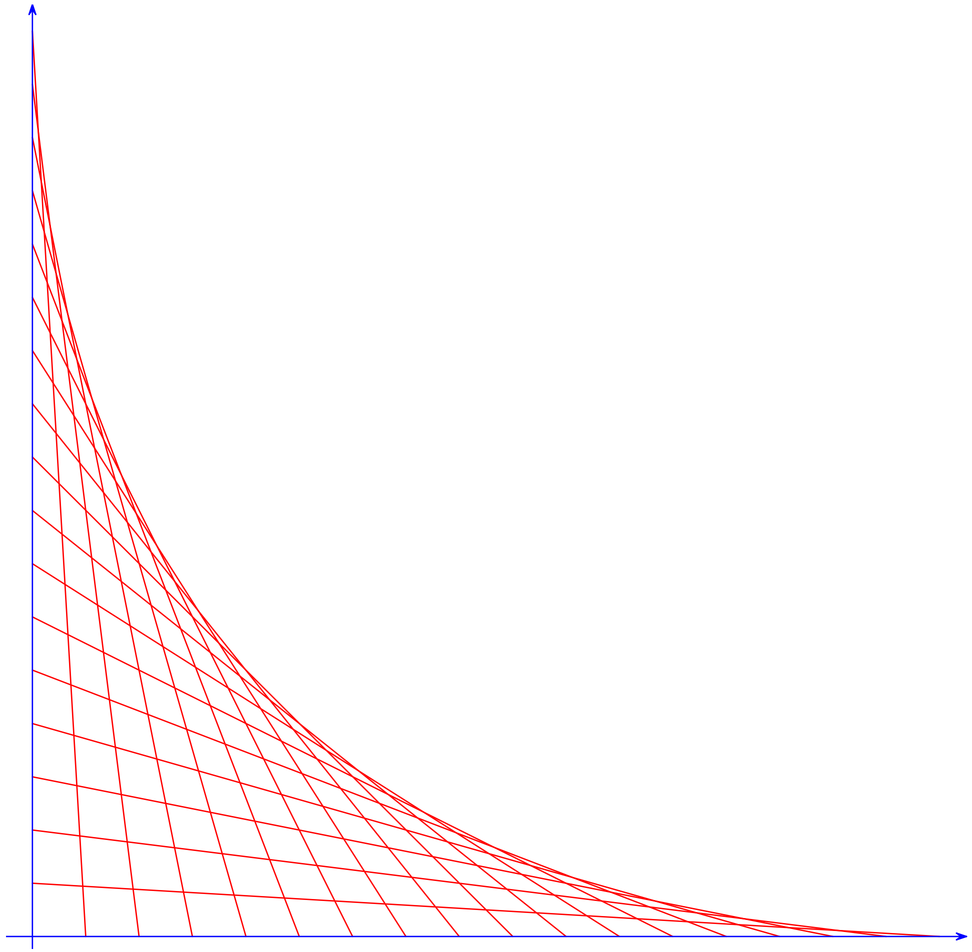
$$\frac{t^2 y}{t}+(n-t)y=(n-t)^2$$

$$ty+(n-t)y=(n-t)^2$$

$$ny=(n-t)^2$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{n} \\ y=\dfrac{(n-t)^2}{n} \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est un arc de parabole.



La théorie des enveloppes de droites :

$$a(t)x+b(t)y+c(t)=0$$

$$a'(t)x+b'(t)y+c'(t)=0$$

Le **point caractéristique** est défini par le système $\begin{cases} a(t)x+b(t)y+c(t)=0 \\ a'(t)x+b'(t)y+c'(t)=0 \end{cases}$.