Le raisonnement par l'absurde

On cherche à démontrer qu'une proposition A est vraie.
Le « schéma » du raisonnement par l'absurde est le suivant :
On commence par supposer que la proposition A est fausse.
On élabore un raisonnement s'appuyant sur les hypothèses de l'énoncé et sur nos connaissances pour arriver à une contradiction : une proposition à la fois vraie et fausse.
On en déduit que la proposition de départ est fausse.
La proposition A est donc vraie.

① Exemple 1 : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2}$ est un rationnel, alors il s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où *p* et *q* sont des entiers naturels non nuls.

1. a) Vérifier que $p^2 = 2q^2$.
   b) En déduire que p^2 est pair.
2. a) Démontrer que si *p* est pair, alors p^2 est pair et si *p* est impair, alors p^2 est impair.
   b) En déduire que *p* est pair.
3. Puisque *p* est pair, posons $p = 2p'$.
a) Démontrer alors que $q^2 = 2p'^2$.
b) En déduire à l'aide des questions précédentes que *q* est pair.
4. Pourquoi les réponses des questions 2 et 3 sont-elles contradictoires avec l'hypothèse ?
En déduire que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Solution :

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où PGCD (p ; q) =1

1. a) On élève au carré : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

b) On dit qu'un entier *n* est pair s'il existe un entier naturel tel que $n = 2k$.
On dit qu'un entier *n* est impair s'il existe un entier naturel tel que $n = 2k + 1$.
Ici $p^2 = 2k$ où $k = q^2 \in \mathbb{N}$
p^2 est donc pair.

2. a) Soit *p* un entier pair.
Alors il existe un entier *k* tel que $p = 2k$.
On a $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$

$p^2 = 2K \quad (K = 2k^2 \in \mathbb{N})$

p^2 est donc pair.

Soit p un entier impair.
Alors il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \\ &= 2K + 1 \text{ avec } K = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Si p est pair alors p^2 est pair. (1)
Si p est impair alors p^2 est impair. (2)

Contraposé de (1) :
Si p^2 est impair alors p est impair.

Contraposé de (2) :

Si p^2 est pair alors p est pair.

Rappel :

- Soient P et Q deux propositions mathématiques

« si P alors Q ».

Exemple : Si ABC rectangle en A, alors $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.
Si $\mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

- Contraposée :

« Si $\overline{Q}$ alors $\overline{P}$ » contraposée ≠ réciproque (si Q alors P)

b) D'après 1. b), p^2 est pair.
On en déduit alors de 2. a) que p est pair.

3. On sait que p est pair
Il existe donc un entier p' tel que $p = 2p'$.

a. On sait déjà que $p^2 = 2q^2$ (1.a)
En remplaçant p par 2 p', on obtient :
$4p^2 = 2q^2$
$q^2 = 2p'^2$
b. Par suite, q^2 est pair, d'où q pair.

4. Il existe un entier q' tel que $q = 2q'$.
Par suite, 2 est un diviseur commun de p et q.
On a par hypothèse PGCD $(p, q) = 1$.
On aboutit à une contradiction.

Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

② Exemple 2 : L’ensemble des nombres premiers est infini

Raisonnons par l’absurde.

Supposons que l’ensemble des nombres premiers est fini.
Notons-le A.

Alors $A = \{p_1\ ;\ p_2\ ;...;\ p_n\}$ où p_1, p_2, p_3 … p_n sont des nombres premiers.

$\forall i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\} \quad p_i \geqslant 2$ (p_i représente p_1, p_2, p_3 … p_n).

Posons $q = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$.

Alors $q \notin$ A (car $\forall i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\} \quad q < p_i$)

Comme q n’appartient pas à A, alors q n’est pas premier.

Donc q est divisible par un nombre premier, par exemple p_r.
Il existe alors un entier s tel que $q = p_r \times s$.
Or $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ est aussi divisible par p_r.
Donc $\exists\, s' \in \mathbb{N}$ tel que $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n = p_r \times s'$.

($s > s'$ car $q > p_1 p_2 ... p_n$).
Donc $q - p_1\, p_2 ... p_n = p_r(s - s')$ soit $1 = p_r(s - s') \in \mathbb{N}$.

Ce qui signifie que p_r divise 1 ; ceci est absurde car $p_r > 1$.

Conclusion : l’ensemble des nombres premiers est infini.