TS1

Contrôle du jeudi 10 janvier 2013 (50 min)

Prénom et nom : ……………………………………………… **Note : …….. / 20**

I. (1 point) Compléter sans justifier l'égalité $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\ldots\ldots$.

II. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\cos x+\dfrac{3}{2}$.

1°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

………

………

………

2°) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes (calcul des extremums au brouillon).

x	0 $\qquad\qquad$ π
Signe de $\sin x$	
Signe de $2\cos x-1$	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

3°) Soit α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$.

a) Compléter sans justifier : $\alpha\approx$ …………….. (valeur arrondie au centième).

b) Calculer $f(\alpha)$ (valeur exacte).

………

………

………

III. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x\times e^x$.

1°) Calculer $f'(x)$.

………

………

………

2°) Laquelle des expressions suivantes est une autre expression de $f'(x)$?

Entourer l'expression choisie et justifier ce choix.

■ $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$

………

………

………

………

………

………

3°) Déterminer les réels x en lesquels la dérivée de f s'annule.

………

………

………

………

………

………

IV. (5 points)

On considère un carré ABCD d'un plan $\mathscr{P}$.

On note Δ la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A et E un point quelconque de Δ. La figure n'est pas demandée.

1°) Justifier que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires (une seule phrase de justification).

2°) En déduire que les droites (DB) et (EC) sont orthogonales.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (1 point)

Un élève doit répondre à un QCM comportant 20 questions.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; parmi ces trois réponses, une seule est exacte.

Quelle est la probabilité que l'élève obtienne au moins la moitié des réponses exactes s'il répond au hasard ?

Répondre sans justifier ni faire de phrase en donnant la valeur arrondie au millième.

………………………………

VI. (3 points)

On donne ci-dessous un extrait du tableau de valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$. On pose $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{X}}{50}$.

Les valeurs des probabilités sont arrondies à la neuvième décimale.

k	$P(\mathrm{X} \leqslant k)$
0	$1,42725 \times 10^{-5}$
1	0,000192678
2	0,001285415
3	0,005656361
4	0,018496015
5	0,048027219
6	0,103398227
7	0,190409812
8	0,307331628
9	0,443740413
10	0,583559418
11	0,710667605
12	0,813943007
13	0,889413492
14	0,93927792
15	0,969196577
16	0,985558343
17	0,993739225

1°) Déterminer les entiers naturels a et b ainsi définis :

- a est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X} \leqslant a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X} \leqslant b) \geqslant 0,975$.

$a =$ ……… $b =$ ………

2°) En déduire l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F (bornes sous forme décimale).

I = ………………………

3°) Un jeu consiste à tirer une boule blanche dans une urne contenant 2 boules blanches et 8 boules noires.

On gagne si l'on tire une boule blanche.

Sur 50 personnes ayant joué, 6 ont gagné.

Le résultat de la question 2°), permet-il de soupçonner l'organisateur du jeu de tricherie ? ☐ oui ☐ non

Corrigé du contrôle du 10-1-2013

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\mathbf{1}$ (limite de référence du cours)

II. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x+\cos x+\dfrac{3}{2}$

1°) **Justifions que $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\sin x\left(2\cos x-1\right)$.**

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad = -\dfrac{1}{2}\times\left(-2\sin 2x\right)-\sin x$ (formule de dérivée : $\left(\cos\left(ax+b\right)\right)'=-a\sin\left(ax+b\right)$)

$= \sin 2x-\sin x$

$= 2\sin x\cos x-\sin x$

$= \sin x\left(2\cos x-1\right)$

Autre méthode (un peu maladroite) :

On sait que $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ (formule de duplication)

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=-\cos^2 x+\cos x+2$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=-2\times\left(-\sin x\right)\times\cos x-\sin x$

$= \sin x\times\left(2\cos x-1\right)$

2°) **Complétons le tableau comportant l'étude du signe de la dérivée de f et les variations de f.**

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
Signe de $\sin x$	0	$+$		$+$	0
Signe de $2\cos x-1$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de f	2	$\nearrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\searrow$	0

On doit mettre toutes les valeurs d'annulation des différentes expressions.

On calcule à part les extremums et on vérifie en traçant la courbe représentative sur l'écran de la calculatrice.

Il ne faut pas oublier les 0 dans le tableau.

3°) α : réel de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ tel que $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$

On peut écrire $\alpha=\text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

a) **Complétons sans justifier.**

$\alpha\approx\mathbf{1{,}82}$ (valeur arrondie au centième)

On utilise pour cela la calculatrice en mode radian.

b) **Calculons $f(\alpha)$.**

On ne reprend pas la valeur approchée de α déterminée au a).

$$\begin{aligned}
f(\alpha)&=-\frac{1}{2}\cos(2\alpha)+\cos\alpha+\frac{3}{2}\\
&=-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha-1\right)+\cos\alpha+\frac{3}{2}\\
&=-\cos^2\alpha+\cos\alpha+2\\
&=-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+2\\
&=\mathbf{\frac{27}{16}}
\end{aligned}$$

III.

$f : x\mapsto \cos x\times e^x$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

(f est le produit des fonctions « cosinus » et « exponentielle » définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=-\sin x\times e^x+\cos x\times e^x$

$= \left(\cos x-\sin x\right)e^x$

2°)

• **Déterminons laquelle des expressions suivantes est une autre expression de $f'(x)$.**

■ $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$ ■ $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\times e^x$

Justifions ce choix.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times e^x = \sqrt{2}\left(\cos x \times \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \times \sin\frac{\pi}{4}\right)\times e^x$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times e^x$$

$$= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)\times e^x$$

$$= (\cos x - \sin x)\times e^x$$

$$= f'(x)$$

On teste les différentes formules en utilisant les formules d'addition et de duplication.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b \cos a \end{array}}$$

3°) **Déterminons les réels *x* en lesquels la dérivée de *f* s'annule.**

On cherche les réels x tels que $f'(x)=0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times e^x = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$ (car $e^x \neq 0$ pour tout réel x) *

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})}$

On se réfère à l'équation :

$$\boxed{\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})}$$

Autres méthodes :

1.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times e^x = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$ (car $e^x \neq 0$ pour tout réel x)

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ ou $x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z})$

Les deux familles de nombres n'en forment qu'une !

2.

$(1) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ (car $e^x \neq 0$ pour tout réel x)

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2}-x+2k\pi & (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = -\frac{\pi}{2}+x+2k'\pi & (k'\in\mathbb{Z}) \quad \text{impossible} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

3.

$(1) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ (car $e^x \neq 0$ pour tout réel x)

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{4}+2k\pi & (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = \frac{5\pi}{4}+2k'\pi & (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

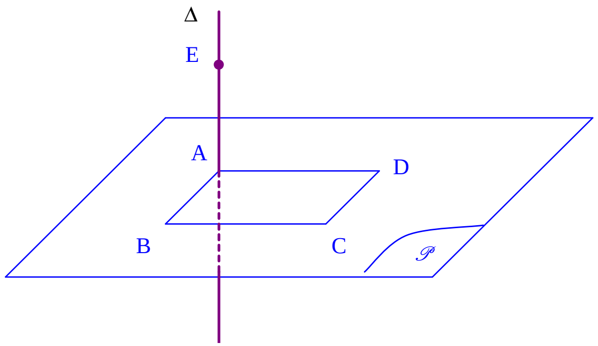
(résolution graphique en utilisant le cercle trigonométrique)

IV.

ABCD : carré d'un plan $\mathscr{P}$

Δ : droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A

E : point quelconque de Δ



1°) **Justifions que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.**

(DB) et (AC) sont les diagonales du carré ABCD donc (DB) et (AC) sont perpendiculaires.

2°) **Déduisons-en que les droites (DB) et (EC) sont orthogonales.**

La droite Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.
Par conséquent, Δ est orthogonale à (DB).

(DB) est donc orthogonale à (AC) et à Δ qui sont deux droites sécantes du plan (EAC).
On en déduit que (DB) est orthogonale au plan (EAC).

Il en résulte que (DB) est orthogonale à toutes les droites du plan (ACE).
Par conséquent, (DB) est orthogonale à (EC).

On peut remarquer que (EAC) est le plan médiateur de [DB].

V.

Un élève doit répondre à un QCM comportant 20 questions.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; parmi ces trois réponses, une seule est exacte.

Quelle est la probabilité que l'élève obtienne au moins la moitié des réponses exactes s'il répond au hasard ?

X : nombre de bonnes réponses

X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{1}{3}$.

Grâce à la calculatrice, on obtient :

$$P(\mathrm{X}\geqslant 10)\approx \mathbf{0{,}092} \text{ (valeur arrondie au millième)}$$

VI.

X : variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0,2$

k	$P(\mathrm{X}\leqslant k)$
0	$1{,}42725\times 10^{-5}$
1	0,000192678
2	0,001285415
3	0,005656361
4	0,018496015
5	0,048027219
6	0,103398227
7	0,190409812
8	0,307331628
9	0,443740413
10	0,583559418
11	0,710667605
12	0,813943007
13	0,889413492
14	0,93927792
15	0,969196577
16	0,985558343
17	0,993739225

1°) **Déterminons les entiers naturels *a* et *b* ainsi définis :**

• *a* est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X}\leqslant a)>0{,}025$;

• *b* est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X}\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

$a=\mathbf{5}$ $\qquad$ $b=\mathbf{16}$

2°) **Déduisons-en l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.**

$$\frac{a}{50}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

$$\frac{b}{50}=\frac{16}{50}=0{,}32$$

$$\mathbf{I=[0{,}1\,;\,0{,}32]}$$

3°) Un jeu consiste à tirer une boule blanche dans une urne contenant 2 boules blanches et 8 boules noires.
On gagne si l'on tire une boule blanche.
Sur 50 personnes ayant joué, 6 ont gagné.

Le résultat de la question 2°), permet-il de soupçonner l'organisateur du jeu de tricherie ?

Non

La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne est égale à $\frac{2}{10} = 0,2$ donc on peut se raccrocher aux questions précédentes.

Comme 50 personnes ont joué, on peut considérer que l'on est dans le cadre de la répétition d'une épreuve de Bernoulli avec $n = 50$ (nombre de répétitions) et $p = 0,2$ (probabilité d'un succès).

On a une fréquence de succès de $\frac{6}{50} = 0,12$ ($\frac{\text{nombre de boules blanches tirées}}{\text{nombre total de tirages}} = \frac{6}{50}$).

0,12 appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 % donc le résultat ne permet pas de soupçonner l'organisateur de tricherie (on rejette l'hypothèse de tricherie).