1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 7 janvier 2013 (30 min)

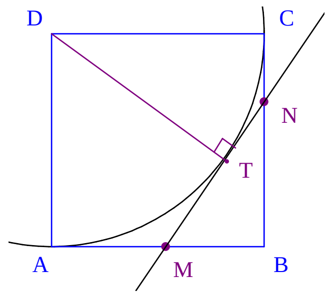
Prénom et nom : …………………………………………………………………… **Note : …… /20**

• Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.

• Tirer tous les traits de fractions à la règle.

I. (8 points)

On considère un carré ABCD de côté 4. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre D et de rayon 4.
Soit T un point quelconque de l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$, intérieur au carré, distinct de A et C.
La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.



On pose AM = x. On admettra sans démonstration que $\text{MN} = \dfrac{x^2+16}{x+4}$.
Déterminer la position de M pour laquelle la distance MN est minimale (lire l'indication de rédaction donnée).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

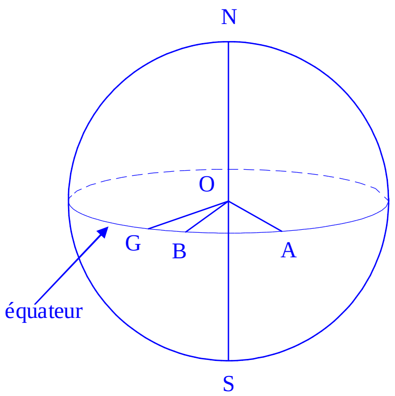
……

Indication de rédaction pour introduire une fonction :

« Considérons la fonction f définie sur … par $f(x)$ = ………… . » ou « Considérons la fonction $f : x \mapsto$ …. ».

II. (4 points)

La Terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon 6 370 km.
On considère le plan passant par O et perpendiculaire à la ligne des pôles (NS).
L'intersection de ce plan avec la Terre s'appelle l'équateur. On note G un point de l'équateur.
On considère deux points A et B situés en Afrique sur l'équateur. Ces points sont disposés comme l'indique le schéma ci-contre. On sait que $\widehat{GOA} = 42°$ et $\widehat{GOB} = 9°$.
Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, portion de l'équateur située en Afrique. On donnera la valeur arrondie au kilomètre.



…………………………………………………………………….

…………………………………………………………………….

…………………………………………………………………….

…………………………………………………………………….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

III. (2 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{187\pi}{6}$.

Compléter sans justifier : La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est ……………….. .

IV. (4 points)

On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Justifier brièvement l'affirmation : « Les réels $-\dfrac{25\pi}{7}$ et $\dfrac{3\pi}{7}$ ont le même point image M sur le cercle $\mathcal{C}$ ».

2°) Le réel $\dfrac{87\pi}{7}$ a-t-il pour image le point M sur le cercle $\mathcal{C}$? Justifier brièvement.

……….

……….

……….

……….

……….

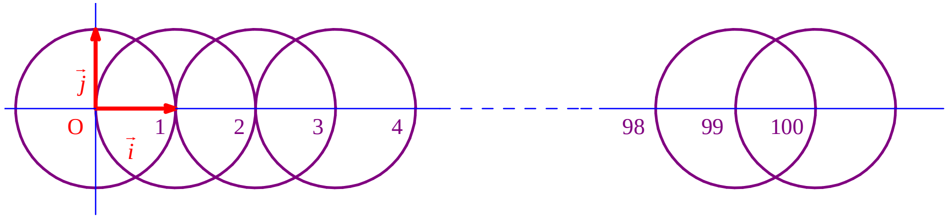
……….

……….

……….

V. (2 points)

On considère la figure suivante constituée de cercles ayant tous le même rayon 1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Compléter l'algorithme suivant qui permet de réaliser cette figure par construction itérative.

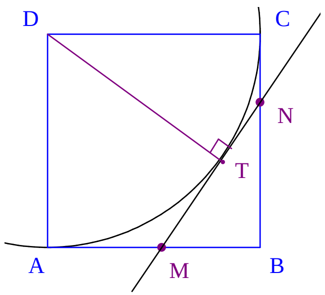
Pour *k* allant de …..… à …..… **Faire**

Tracer le cercle ayant pour centre le point de coordonnées (… ; …) et de rayon ……

FinPour

Corrigé du contrôle du 7-1-2013

I.



Le point T est un point variable de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ donc les points M et N sont aussi des points variables.

AM = x

$$\mathbf{MN}=\frac{x^2+16}{x+4}$$

Déterminons la position de M pour laquelle la distance MN est minimale.

Considérons la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x^2+16}{x+4}$ définie sur [0 ; 4].

f est dérivable sur [0 ; 4] comme fonction rationnelle.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f\,'(x)=\frac{2x\times(x+4)-x^2-16}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+8x-16}{(x+4)^2}$$

Les racines du polynôme $x^2+8x-16$ sont $-4-4\sqrt{2}$ et $-4+4\sqrt{2}$ (obtenues grâce au discriminant réduit $\Delta' = 32$).

On utilise la règle du signe d'un trinôme du second degré.

x	0		$4\sqrt{2}-4$		4
Signe de $x^2+8x-16$		–	0^{num}	+	
Signe de $(x+4)^2$		+		+	
Signe de $f\,'(x)$		–	0^{num}	+	
Variations de f	4	↘	$f\left(4\sqrt{2}-4\right)$	↗	4

Grâce à ce tableau, on déduit que f admet un minimum global sur [0 ; 4], atteint en $x=4\sqrt{2}-4$.

La distance MN est minimale pour $x=4\sqrt{2}-4$.

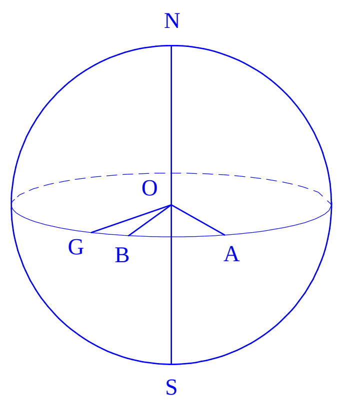
On pourrait aussi considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Attention : il y aura alors une double barre dans le tableau de variation.

Il est intéressant de noter que le minimum de MN est obtenu lorsque T est au « milieu » de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, ce qui est tout à fait normal compte tenu de la symétrie de la figure.
Cela nous fournit un moyen de construire le point M de manière exacte (à la règle et au compas).

$$f\left(4\sqrt{2}-4\right)=\frac{\left(4\sqrt{2}-4\right)^2+16}{\left(4\sqrt{2}-4\right)+4}=\frac{64-32\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=8\sqrt{2}-8$$

II.



$\widehat{GOA} = 42°$ et $\widehat{GOB} = 9°$.

Calculons la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

$\widehat{AOB} = 42° - 9° = 33°$

Donc $\widehat{AOB} = \dfrac{33\pi}{180}$ rad $= \dfrac{11\pi}{60}$ rad (valeur exacte)

Quelques élèves ont effectué le calcul de $\dfrac{11\pi}{60}$ et ont obtenu une valeur approchée de la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ puis ont poursuivi le calcul de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en utilisant cette valeur approchée.
C'est une mauvaise méthode. En mathématiques (contrairement à la physique), on travaille le plus possible avec les valeurs exactes.

Donc $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 6370 \times \dfrac{11\pi}{60}$ km

• On applique la formule du cours $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = R \times x$ que l'on n'écrit pas (sinon il faudrait préciser la signification des lettres R et x qui ne figure pas dans l'énoncé).
On applique toujours les formules en situation (pas de formule hors contexte).

• Comme dit précédemment, on grade la valeur exacte de la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ à l'intérieur du calcul.

Avec la calculatrice, on obtient : $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 3668{,}85662...$ km.

L'affichage de la calculatrice est 3668,856621.
On n'écrit évidemment pas la dernière décimale qui peut ne pas être exacte.

D'où **$\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) \approx 3669$ km (valeur arrondie à l'unité)**

Quelques élèves se sont trompés dans le calcul sur calculatrice en oubliant le π (qu'on obtenait d'ailleurs avec la toucher spéciale de la calculatrice).

Une autre méthode très maladroite consisterait à calculer la longueur des arcs de cercles $\overset{\frown}{GA}$ et $\overset{\frown}{GB}$ et de calculer la différence pour obtenir la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

III.

$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{187\pi}{6}$

On a : $\dfrac{187\pi}{6} = \dfrac{192\pi - 5\pi}{6} = 32\pi - \dfrac{5\pi}{6} = 16 \times 2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$.

$16 \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est $-\dfrac{5\pi}{6}$.

IV.

1°) **Justifions l'affirmation : « Les réels $-\dfrac{25\pi}{7}$ et $\dfrac{3\pi}{7}$ ont le même point image M sur le cercle $\mathcal{C}$ ».**

On a : $\dfrac{3\pi}{7} + \dfrac{25\pi}{7} = \dfrac{28\pi}{7} = 4\pi = 2 \times 2\pi$

$2 \in \mathbb{Z}$ donc les réels $-\dfrac{25\pi}{7}$ et $\dfrac{3\pi}{7}$ ont le même point image M sur le cercle $\mathcal{C}$

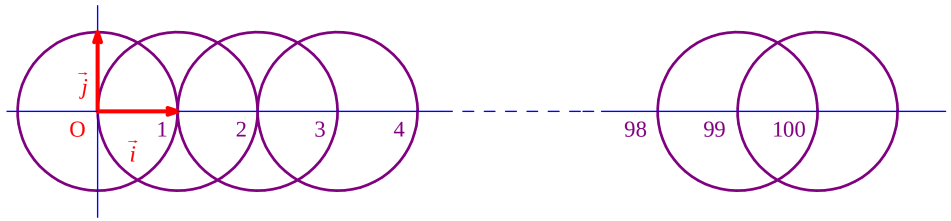
On applique la propriété du cours.
On évite de passer par les mesures principales (méthode plus longue).

2°) **Déterminons si le réel $\dfrac{87\pi}{7}$ a pour image le point M sur le cercle $\mathcal{C}$.**

On a : $\dfrac{87\pi}{7} - \dfrac{3\pi}{7} = 12\pi = 6 \times 2\pi$.

$6 \in \mathbb{Z}$ donc $\dfrac{87\pi}{7}$ a pour image le point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

V. Algorithme correspondant à une construction itérative



La figure est formée du :

- cercle de centre de coordonnées (0 ; 0) et de rayon 1 ;

- cercle de centre de coordonnées (1 ; 0) et de rayon 1 ;

- cercle de centre de coordonnées (2 ; 0) et de rayon 1 ;

etc.

- cercle de centre de coordonnées (100 ; 0) et de rayon 1.

La figure est donc formée de 101 cercles.

Pour *k* allant de **0** à **100** **Faire**

  Tracer le cercle ayant pour centre le point de coordonnées (***k*** ; **0**) et de rayon **1**

FinPour

On peut programmer l'algorithme sur la calculatrice.

Effacer d'abord l'écran afin qu'il soit vierge de tout tracé de courbe de fonctions.

Programme sur calculatrice TI.

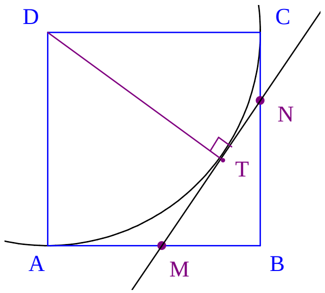
```
: ClrDraw
: For (K,0,100)
: Circle(K,0,1)
: End
```

On voit alors tous les cercles se former au fur et à mesure (attention aux « échelles » : il faut prendre la même échelle sur les deux axes ; sinon les cercles apparaîtront comme des ellipses !).

Pour aller plus loin dans l'exercice I

On se propose de démontrer l'expression de MN ($\text{MN}=\dfrac{x^2+16}{x+4}$) que l'énoncé demandait d'admettre lors du contrôle pour raison de temps.

On considère un carré ABCD de côté 4. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre D et de rayon 4.
Soit T un point quelconque de l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$, intérieur au carré, distinct de A et C.
La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.



On pose AM = *x*.

Démontrer que l'on a $\text{MN}=\dfrac{x^2+16}{x+4}$.

Indication :

Poser *y* = CN et chercher une relation liant *x* et *y*.