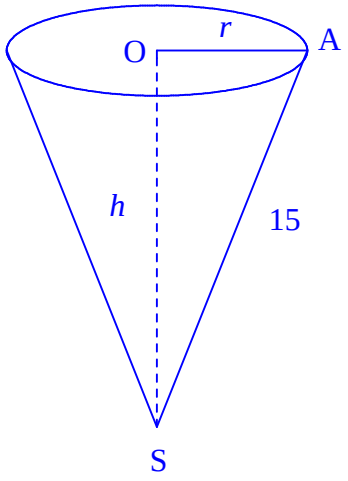
$1^{\text{ère}}$ S — Entraînement sur les problèmes d'optimisation

1 On découpe dans un disque de rayon 15 cm le patron d'un cône de révolution. On souhaite que ce cône soit de volume maximal. On note r le rayon de sa base et h sa hauteur (ces deux dimensions exprimées en centimètres).



S désigne le sommet et O le centre du disque de base.

1°) Justifier que $h \in [0\,;15]$.

2°) Exprimer r en fonction de h.

3°) Justifier que le volume du cône (en cm^3) est donné par la formule : $\text{V}(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + 75\pi h$.

4°) Étudier le sens de variation de la fonction V qui à tout réel h de l'intervalle [0 ; 15] associe $\text{V}(h)$.

5°) En déduire pour le cône de volume maximal :

a) sa hauteur h ;

b) la mesure en degrés du demi-angle au sommet (valeur arrondie à l'unité).

Rappel de la formule du volume d'un cône : $\text{volume} = \dfrac{\pi \times (\text{rayon de la base})^2 \times \text{hauteur}}{3}$

2 Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté x ($x > 0$). L'unité de longueur est le dm.

1°) Justifier que $y = \dfrac{1}{x^2}$.

2°) En déduire que l'aire totale de la boîte est $\text{S}(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.

3°) Donner les dimensions minimales de la boîte.

Corrigé

1 Thème : cône de volume maximal

La génératrice du cône a pour longueur 15 cm (sur la figure, $\mathrm{SA} = 15$ cm).

1°) **Justifions que $h \in [0\,;15]$.**

Dans le triangle OAS rectangle en O, l'hypoténuse mesure 15 cm donc $h < 15$.

h appartient à l'intervalle [0 ; 15] car une longueur est toujours positive et que l'hypoténuse du triangle AOS mesure 15 cm.

Autre façon :

$225 - h^2 \geqslant 0$ donc $h^2 \leqslant 225$ d'où …

2°) **Exprimons *r* en fonction de *h*.**

Comme [OS] est la hauteur du cône de révolution, le triangle AOS est rectangle en O (avec $r = \mathrm{OA}$ et $h = \mathrm{SO}$).

Donc d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{SA}^2 = \mathrm{SO}^2 + \mathrm{OA}^2$ soit $h^2 = \mathrm{SO}^2 + r^2$ donc $r^2 = 225 - h^2$.

Donc $\boldsymbol{r = \sqrt{225 - h^2}}$.

3°) **Justifions que le volume du cône est donnée par la formule : $\mathrm{V}(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + 75\pi h$.**

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(h) &= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} \\ &= \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} \\ &= \frac{\pi \times \left(225 - h^2\right) \times h}{3}\end{aligned}$$

On opère la distributivité uniquement sur les deux derniers facteurs du produit.

$$\mathrm{V}(h) = \frac{\pi \times \left(225h - h^3\right)}{3}$$

On finit la distributivité.

$$\boldsymbol{\mathrm{V}(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + 75\pi h}$$

4°) **Étudions le sens de variation de la fonction V définie sur [0 ; 15]**.

Calculons la dérivée de V.

La fonction V est dérivable sur [0 ; 15] comme fonction polynôme.

$\forall\ h \in [0\ ;\ 15]$ $\quad V'(h) = -\frac{1}{\cancel{3}}\pi \times \cancel{3}h^2 + 75\pi \times 1$

$$= -\pi h^2 + 75\pi$$
$$= \pi\left(75 - h^2\right)$$
$$= \pi\left(\sqrt{75} - h\right)\left(\sqrt{75} + h\right)$$
$$= \pi\left(5\sqrt{3} - h\right)\left(5\sqrt{3} + h\right)$$

La valeur d'annulation de $5\sqrt{3} - h$ est $5\sqrt{3}$ qui est bien située dans l'intervalle $[0\,;15]$.
La valeur d'annulation de $5\sqrt{3} + h$ est $-5\sqrt{3}$ qui est située hors de l'intervalle $[0\,;15]$.

h	0		$5\sqrt{3}$		15
Signe de $5\sqrt{3} - h$		$+$	0	$-$	
Signe de $5\sqrt{3} + h$		$+$		$+$	
Signe de $V'(h)$		$+$	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	$V\left(5\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	0
	$V(0)$				$V(15)$

$$V\left(5\sqrt{3}\right) = \pi\left[-\frac{1}{3}\left(5\sqrt{3}\right)^3 + 75 \times 5\sqrt{3}\right]$$
$$= \pi\left(-\frac{1}{\cancel{3}} \times 125 \times \cancel{3}\sqrt{3} + 75 \times 5\sqrt{3}\right)$$
$$= \pi(375 - 125)\sqrt{3}$$
$$= 250\pi\sqrt{3}$$

$$V\left(5\sqrt{3}\right) = 250\pi\sqrt{3}$$

La fonction V est croissante sur]0 ; $5\sqrt{3}$] et décroissante sur [$5\sqrt{3}$; 15].

5°) **Déduisons-en pour le cône de volume maximal sa hauteur *h* et le demi-angle au sommet.**

Pour que le volume du cône soit maximal, *h* doit être égal à $5\sqrt{3}$.

On appelle **demi-angle au sommet** d'un cône de révolution l'angle formé par une génératrice du cône et la hauteur de ce cône.

Une **génératrice** d'un cône de révolution est un segment joignant le sommet du cône à un point du cercle de base.

Ici le demi-angle au sommet est l'angle $\widehat{OSA}$.

On note α la mesure en degré du demi-angle au sommet du cône de volume maximal.

$$\begin{aligned}\cos\alpha° &= \frac{h}{15}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{15}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

D'après la calculatrice, $\alpha = 54,7356103...$.

On peut aussi utiliser le sinus ou la tangente.

2 Thème : boîtes parallélépipédiques de volume maximal

Les deux côtés de la base carrée ont pour côté x.
La hauteur a pour longueur y.

Faire une figure

1°) **Justifions que $y = \frac{1}{x^2}$.**

On sait que le volume de la boîte est de $1\ \text{dm}^3$.

On a donc : $x^2 \times y = 1$.

Par conséquent, $y = \frac{1}{x^2}$.

On pourrait aussi écrire en mettant les unités dans les calculs :

$$1\ \text{dm}^3 = x\ \text{dm} \times x\ \text{dm} \times y\ \text{dm}$$

2°) **Déduisons-en que l'aire totale de la boîte est $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.**

Pour calculer l'aire totale du parallélépipède, il n'y a pas de formule particulière à savoir.
Il suffit juste d'additionner les aires de toutes les faces (sachant que certaines ont la même aire, ce qui simplifie le calcul).

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x^2 + 4xy \\ &= 2x^2 + 4 \times x \times \frac{1}{x^2} \\ &= 2x^2 + 4\frac{x}{x^2} \\ &= 2x^2 + 4\frac{x}{x^2} \end{aligned}$$

3°) **Donnons les dimensions minimales de la boîte.**

On va étudier les variations de la fonction S.

S est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut décomposer en posant $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = \frac{4}{x}$ mais ce n'est pas très utile.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad S'(x) = 2 \times 2x + 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (on laisse les traces des formules utilisées)

$$= 4x - \frac{4}{x^2}$$

$$= 4\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{4\left(x^3 - 1\right)}{x^2}$$

On pourrait utiliser la formule de factorisation de $a^3 - b^3$: $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Tableau de variations

Le volume de la boîte est minimal pour $x = 1$.