TS1 spécialité

Devoir pour le vendredi 21 décembre 2012

I. Une équation diophantienne

On s'intéresse à l'équation $a^2 - b^2 = 21$ (E) où a et b sont des entiers naturels.

1°) Tracer sur *Geogebra* la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 21$ dans un repère du plan (on ne demande pas d'imprimer la courbe). Déterminer alors graphiquement deux couples solutions de (E).

2°) Résoudre (E) par le calcul.

II. Soit n un entier naturel. On souhaite déterminer PGCD($7n + 4$; $5n + 3$).

Utiliser un tableur afin d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous. On ne demande pas de l'imprimer

	A	B	C	D
1	n	$7n + 4$	$5n + 3$	PGCD($7n + 4$; $5n + 3$)
2	0			
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			

Que peut-on penser de PGCD($7n + 4$; $5n + 3$) pour n entier naturel quelconque ?

Faire la démonstration.

III. Le but de l'exercice est de déterminer tous les entiers relatifs x vérifiant $x^2 + x - 2 \equiv 0 \ [35]$ (E).

1°) À l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice, déterminer les entiers x compris entre 0 et 34 au sens large vérifiant la relation (E). On se contentera de donner la liste de ces entiers sans explication.

2°) En déduire tous les entiers relatifs x vérifiant la relation (E).

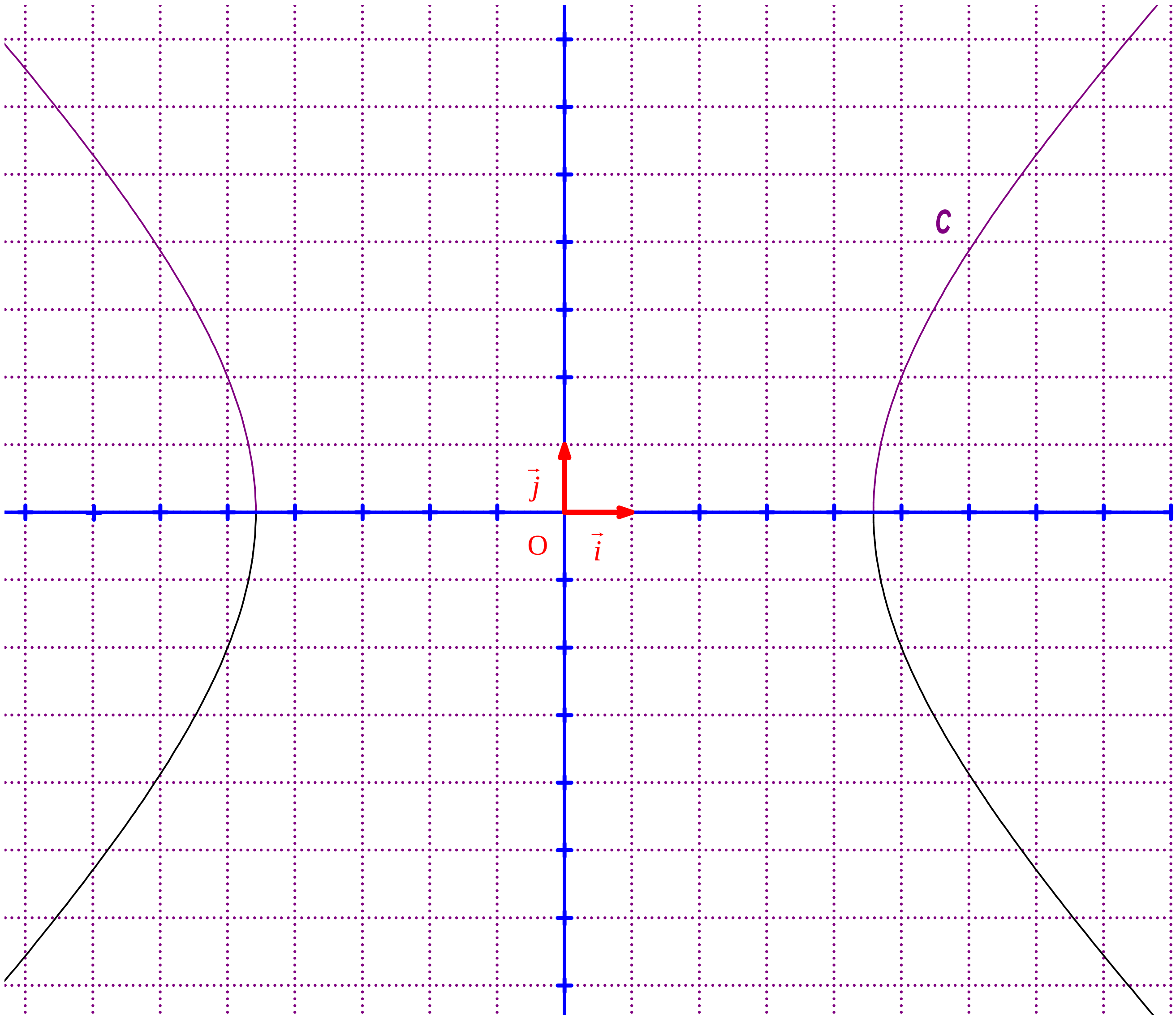
Conseils

L’ensemble du devoir doit tenir sur une copie simple.

La présentation doit être la plus soignée possible.

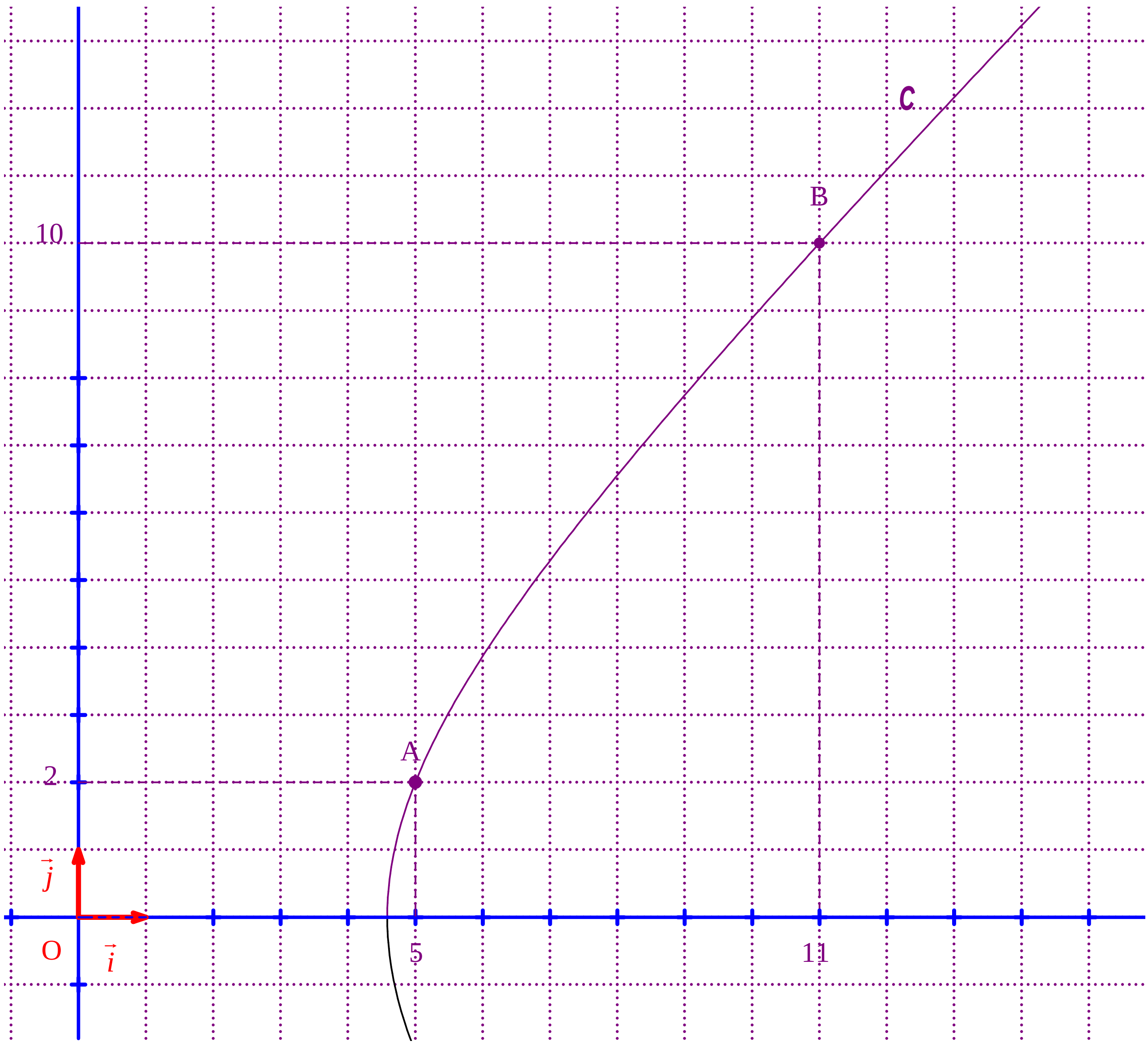
Corrigé du devoir pour le 21 décembre 2012

I. $a^2 - b^2 = 21$ **(E) avec** $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$



Pour obtenir la courbe sur calculatrice, il faudrait définir 2 fonctions.

On s'intéresse à la partie de la courbe situé dans le quadrant : $x > 0$, $y > 0$.
Cette courbe est une hyperbole constituée de deux branches symétriques par rapport à l'origine du repère.
On pourrait s'en rendre compte en faisant un changement de repère.
La courbe admet des droites asymptotes.



Un examen de la courbe pour la fenêtre $0 \leqslant x \leqslant 100$ et $0 \leqslant y \leqslant 100$ fait apparaître deux points à coordonnées entières appartenant à $\mathcal{C}$: il s'agit des points A et B de coordonnées respectives de coordonnées (5 ; 2) et (11 ; 10).

Il se pourrait qu'il y en ait d'autres ; la question 2°) nous montrera que ce sont les seuls.
La question 2°) va permettre de voir que ces sont les seuls.

2°) **Concluons.**

$a^2 - b^2 = 21$ (E) avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$

(E) $\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 21$

$\Leftrightarrow$ $a - b$ et $a + b$ sont des diviseurs positifs associés de 21

Les diviseurs positifs de 21 sont : 1, 3, 7, 21.

De plus, comme a et b sont des entiers naturels, on a : $a - b \leqslant a + b$.

Donc

$$(E) \Leftrightarrow \quad ① \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=21 \end{cases} \quad \text{ou} \quad ② \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=11 \\ b=10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}$$

Donc les couples solutions de (E) sont (5 ; 2) et (11 ; 10).

II. On souhaite déterminer PGCD(7*n* + 4 ; 5*n* + 3) avec $n \in \mathbb{N}$.

Utiliser un tableur afin d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous. On ne demande pas de l'imprimer

	A	B	C	D
1	*n*	7*n* + 4	5*n* + 3	PGCD(7*n* + 4 ; 5*n* + 3)
2	0			1
3	1			1
4	2			1
5	3			1
6	4			1
7	5			1
8	6			1
9	7			1
10	8			1
11	9			1
12	10			1

On peut penser que PGCD(7*n* + 4 ; 5*n* + 3) = 1 pour tout entier naturel *n*.

Démontrons ce résultat.

3 méthodes

1ère méthode : Il s'agit de trouver une combinaison linéaire de 7*n* + 4 et de 5*n* + 3 à coefficients entiers égale à 1.

$-5(7n + 4) + 7(5n + 3) = 1$

D'après le théorème de Bezout, cette égalité montre que 7*n* + 4 et 5*n* + 3 sont premiers entre eux soit PGCD(7*n* + 4 ; 5*n* + 3) = 1.

2^e méthode :

Soit d un diviseur positif commun à $7n + 4$ et $5n + 3$.

$d \mid 7n + 4$ et $d \mid 5n + 3$.
donc d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $7n + 4$ et $5n + 3$.
En particulier, $d \mid -5(7n + 4) + 7(5n + 3)$
Donc $d \mid 1$
D'où $d = 1$.
On en déduit que $7n + 4$ et $5n + 3$ sont premiers entre eux soit $\text{PGCD}(7n + 4 ; 5n + 3) = 1$.

3^e méthode :

C'est un faux algorithme d'Euclide (on écrit des égalités du genre « division euclidienne » sans s'occuper de savoir si ce sont vraiment des divisions euclidiennes c'est-à-dire que l'on ne regarde pas si le reste est strictement inférieur au diviseur).

$7n + 4 = 1 \times (5n + 3) + (2n + 1)$

$5n + 3 = 2 \times (2n + 1) + (n + 1)$

$2n + 1 = 1 \times (n + 1) + n$

$n + 1 = 1 \times n + 1$

$n = n \times 1 + 0$

D'après le lemme d'Euclide, on a :

$\text{PGCD}(7n + 4 ; 5n + 3) = \text{PGCD}(5n + 3 ; 2n + 1) = \ldots = \text{PGCD}(n + 1 ; n) = \text{PGCD}(1 ; 0) = 1$

III. $x^2 + x - 2 \equiv 0 \; [35] \quad$ (E)

1°) **À l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice, déterminons les entiers x compris entre 0 et 34 au sens large vérifiant la relation (E).**

Les entiers compris entre 0 et 34 solutions de (E) sont : 1, 8, 26 et 33.

Sur tableur, on utilise MOD.

Sans utiliser MOD, on pourrait faire la division par 35 et regarder si le résultat est un entier (on pourrait aussi utiliser les fonctions logiques du tableur).

Variables :
X, A : réels

Initialisation :
X prend la valeur 0

Traitement et sortie :
Tantque X $\leqslant$ 34 **Faire**
  A prend la valeur $X^2 + X - 2$
  Si $\dfrac{A}{35} = E\left(\dfrac{A}{35}\right)$
    Afficher X
  FinSi
  X prend la valeur X + 1
FinTantque

2°) **Déduisons-en tous les entiers relatifs *x* vérifiant la relation (E).**

Notons r le reste de la division euclidienne de x par 35 avec $0 \leqslant r < 35$.

Nous pouvons écrire $x \equiv r \quad [35]$.

On a alors $x^2 \equiv r^2 \quad [35]$.
Donc $x^2 + x - 2 \equiv r^2 + r - 2 \quad [35]$.

On peut donc écrire (E) $\Leftrightarrow r^2 + r - 2 \equiv 0 \quad [35]$

$\Leftrightarrow r = 1$ ou $r = 3$ ou $r = 26$ ou $r = 33$ (résultat du 1°))

Les solutions de (E) sont donc les entiers de l'une des formes suivantes :

$$1 + 35k,\ 8 + 35k,\ 26 + 35k,\ 33 + 35k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Écriture de l'ensemble des solutions :

$$S = \{1 + 35k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8 + 35k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{26 + 35k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{33 + 35k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$