TS1

Contrôle du jeudi 20 décembre 2012 (1 h 30)

Lire les conseils de rédaction pour les exercices **VI** et **VIII** donnés au verso.

I. (3 points) Question de cours

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).

Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{\text{A}}$ et B le sont aussi.

II. (12 points)

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.
En France, les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.
Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Pour les résultats des questions 1°) et 2°) a), donner la valeur exacte sous forme décimale.
Pour les résultats des questions 2°) b) et c), donner la valeur arrondie au millième.

1°) **Étude de l'état d'asthme du couple**

On admet que les événements « l'homme est asthmatique » et « la femme est asthmatique » sont indépendants.
Calculer la probabilité des événements suivants
A : « aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique » ;
B : « un seul des deux adultes du couple est asthmatique » ;
C : « les deux adultes du couple sont asthmatiques ».
Donner un seul calcul justificatif à chaque fois.

2°) **Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant**

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :
- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

a) Calculer la probabilité de l'événement E : « le premier enfant du couple est asthmatique ».
b) Quelle est la probabilité qu'un enfant asthmatique n'ait aucun parent asthmatique ?
c) Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatique ?

III. (3 points)

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0, 1, 2. On tire au hasard une boule dans cette urne. Si i désigne le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à i, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que des boules de 0 à i.
On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro obtenu à l'issue du deuxième tirage.
Recopier et compléter la phrase et le tableau ci-contre qui donne la loi de probabilité de X (ne pas justifier, écrire les probabilités sous forme de fractions).

X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots.$, $x_2 = \ldots..$, $x_3 = \ldots..$.

x_i			
$P(\text{X} = x_i)$			

IV. (2 points)

On considère l'algorithme ci-contre.

> **Variables :** A et C, entiers naturels
>
> **Initialisation :**
> C prend la valeur 0
>
> **Traitement :**
> **Répéter** 9 fois
> A prend une valeur aléatoire entre 1 et 7 *
> **Si** $\text{A} > 5$
> alors C prend la valeur $\text{C} + 1$
> **FinSi**
> **FinRépéter**
>
> **Sortie :**
> Afficher C

Dans l'expérience aléatoire simulée par cet algorithme, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée en sortie.

Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.
Répondre sans justifier en une seule phrase.
On ne demande pas de programmer cet algorithme.

* entier aléatoire compris entre 1 et 7 au sens large

V. (1 point)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

Calculer $P(\text{X} \geqslant 5)$ (donner la valeur arrondie au millième). Répondre sans justifier, sans faire de phrase.

Dans les exercices VI à VIII, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique des nombres complexes.

VI. (12 points)

On note A et B les points du plan d'affixes respectives 1 et 4 – i.
Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3 ainsi définis (figures non demandées) :

$E_1 = \left\{\text{M}(z) \in P \,/\, |\text{i}\bar{z}| = 3\right\}$; $E_2 = \left\{\text{M}(z) \in P \,/\, |\bar{z} - 4 + \text{i}| = 5\right\}$; $E_3 = \{\text{M}(z) \in P \,/\, |1 - z| = |4 - \text{i} - z|\}$.

VII. (4 points)

Soit z un nombre complexe non nul. On note A, B, C les points d'affixes respectives z, $\bar{z}$ et $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

Démontrer que les points A, B, C sont situés sur un même cercle.

VIII. (3 points)

On rappelle que pour tout nombre complexe Z on a : $|Z|^2 = Z\bar{Z}$.

Soit z un nombre complexe.
En utilisant la formule rappelée, et sans utiliser la forme algébrique, démontrer que :

$$|1 + \text{i}z| = |1 - \text{i}z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Bonus (à ne faire que si tout le reste a été traité) : retrouver ce résultat géométriquement sans calcul.

Consignes

- Ne rien écrire sur l'énoncé.
- Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

Modèles de rédaction

VI. Modèle de rédaction pour la recherche des ensembles E_1, E_2, E_3 (à respecter scrupuleusement)

- On rédigera la recherche en utilisant une « chaîne » d'équivalences (à écrire les unes en dessous des autres, sans couper sur deux pages) sur le modèle suivant :

Soit M un point quelconque du plan d'affixe z.

$\text{M} \in E_1 \Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

- On conclura ainsi :

« L'ensemble E_1 est …………………………………………………….. ».

VIII. Modèle de rédaction pour établir le résultat demandé

On rédigera la recherche en utilisant une « chaîne » d'équivalences sur le modèle suivant :

$|1+\text{i}z| = |1-\text{i}z| \Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

Corrigé du contrôle du 20-12-2012

I. Question de cours

A et B : événements d'un espace probabilisé (Ω, P)

Démontrons que si A et B sont indépendants, alors $\overline{\text{A}}$ et B le sont aussi.

A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements.

Donc d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(\text{A}\cap\text{B})+P(\overline{\text{A}}\cap\text{B})=P(\text{B})$.

Donc $P(\overline{\text{A}}\cap\text{B})=P(\text{B})-P(\text{A}\cap\text{B})$.

Or A et B sont deux événements indépendants donc $P(\text{A}\cap\text{B})=P(\text{A})\times P(\text{B})$.

D'où
$$\begin{aligned}P(\overline{\text{A}}\cap\text{B})&=P(\text{B})-P(\text{A})\times P(\text{B})\\&=P(\text{B})\left(1-P(\text{A})\right)\\&=P(\text{B})\times P(\overline{\text{A}})\end{aligned}$$

Donc les événements $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

II.

1°) **Étude de l'état d'asthme du couple**

On note H l'événement « l'homme est asthmatique » et F l'événement « la femme est asthmatique ».

$P(\text{H})=0,04$ et $P(\text{F})=0,05$
Les événements H et F sont indépendants.

On peut dresser un arbre de probabilité mais ce n'est pas indispensable.

A : « aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »

$P(\text{A})=P(\overline{\text{H}}\cap\overline{\text{F}})$
Les événements H et F sont indépendants donc les événements $\overline{\text{H}}$ et $\overline{\text{F}}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}P(\text{A})&=P(\overline{\text{H}})\times P(\overline{\text{F}})\\&=0,96\times0,95\\&=\mathbf{0,912}\end{aligned}$$

B : « un seul des deux adultes du couple est asthmatique »

$P(\text{B})=P(\text{H}\cap\overline{\text{F}})+P(\overline{\text{H}}\cap\text{F})$

Les événements H et F sont indépendants donc les événements $\overline{\text{H}}$ et F d'une part, et H et $\overline{\text{F}}$ d'autre part sont indépendants.

Donc

$$\begin{aligned}P(\text{B})&=P(\text{H})\times P(\overline{\text{F}})+P(\overline{\text{H}})\times P(\text{F})\\&=0,04\times0,95+0,96\times0,05\\&=\mathbf{0,086}\end{aligned}$$

C : « les deux adultes du couple sont asthmatiques »

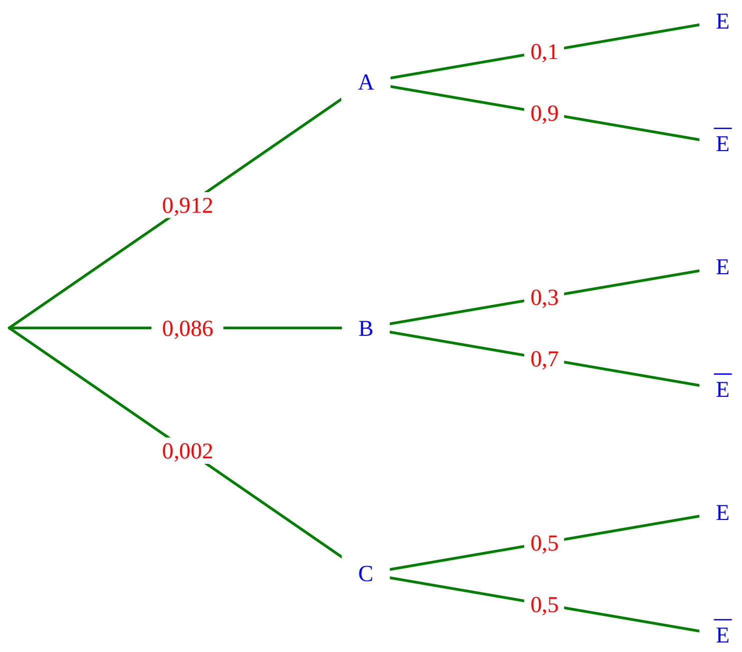
$$\begin{aligned}P(\text{C})&=P(\text{H}\cap\text{F})\\&=P(\text{H})\times P(\text{F})\\&=0,04\times0,05\\&=\mathbf{0,002}\end{aligned}$$

On constate que $P(\text{A})+P(\text{B})+P(\text{C})=1$ ce qui est tout à fait normal car A, B, C forment un système complet d'événements.

On aurait d'ailleurs pu se servir de cette propriété pour calculer $P(\text{C})$.

2°) **Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant**

a) **Calculons la probabilité de l'événement E : « le premier enfant du couple est asthmatique ».**



Les événements A, B, C constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{C})$$

$$= P(\mathrm{E} / \mathrm{A}) \times P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{E} / \mathrm{B}) \times P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{E} / \mathrm{C}) \times P(\mathrm{C})$$

$$= 0{,}1 \times 0{,}912 + 0{,}3 \times 0{,}086 + 0{,}5 \times 0{,}002$$

$$= \mathbf{0{,}118}$$

b) **Calculons la probabilité qu'un enfant asthmatique n'ait aucun parent asthmatique.**

Il fallait reformuler la question avec un « sachant que » pour bien comprendre que l'on demandait de calculer la probabilité qu'un enfant n'ait aucun parent asthmatique sachant qu'il est asthmatique.

On doit calculer $P(\mathrm{A} / \mathrm{E})$ (attention beaucoup d'élèves n'ont pas compris l'énoncé).

$$P(\mathrm{A} / \mathrm{E}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}912}{0{,}118}$$

$$= \frac{0{,}0912}{0{,}118}$$

$$= 0{,}772881355...$$

$P(\mathrm{A} / \mathrm{E}) \approx$ **0,773** (valeur arrondie au millième)

c) **Calculons la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatique.**

$$P(\overline{\mathrm{A}} / \overline{\mathrm{E}}) = \frac{P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E}})}{P(\overline{\mathrm{E}})}$$

ou

$$P(\mathrm{B} \cup \mathrm{C} / \overline{\mathrm{E}}) = \frac{P((\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \cap \overline{\mathrm{E}})}{P(\overline{\mathrm{E}})}$$

$$= \frac{P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{E}}) + P(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{E}})}{P(\overline{\mathrm{E}})}$$

$$= \frac{0{,}7 \times 0{,}086 + 0{,}5 \times 0{,}002}{1 - 0{,}118}$$

$$= \frac{0{,}7 \times 0{,}086 + 0{,}5 \times 0{,}002}{1 - 0{,}118}$$

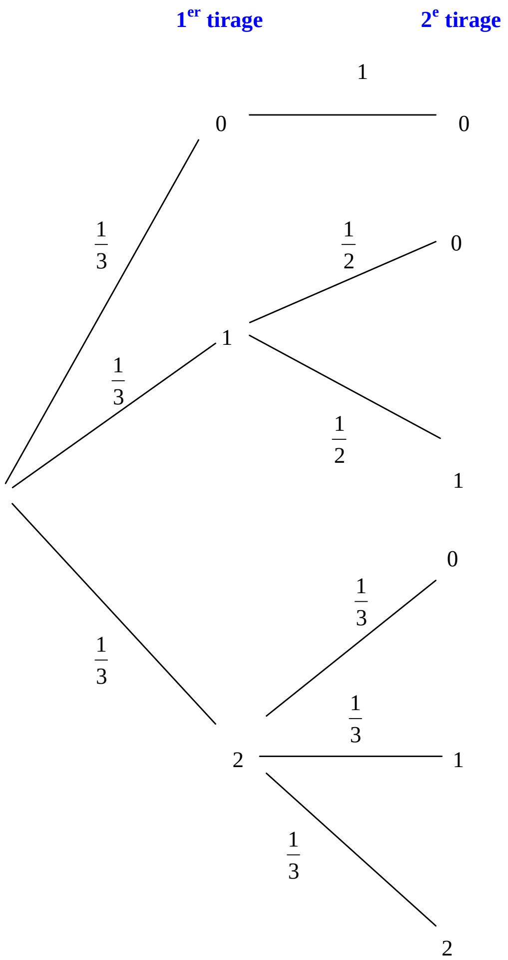
$$= \frac{0{,}0612}{0{,}882}$$

$$= 0{,}069387755...$$

$P(\overline{\mathrm{A}} / \overline{\mathrm{E}}) \approx$ **0,070** (valeur arrondie au millième)

III.

On dresse un arbre de probabilités.



X peut prendre les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

$$P(\mathrm{X}=0) = 1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} = \frac{1}{2}+\frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$P(\mathrm{X}=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}+\frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

$$P(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

On en déduit la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

x_i	**0**	**1**	**2**
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\mathbf{\frac{11}{18}}$	$\mathbf{\frac{5}{18}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$

Une partie des élèves s'est trompée dans cette loi de probabilité.

Il fallait bien penser à faire un arbre.

IV.

Variables : A et C, entiers naturels

Initialisation :
C prend la valeur 0

Traitement :
Répéter 9 fois
  A prend une valeur aléatoire entre 1 et 7 *
  Si A > 5
    alors C prend la valeur C + 1
  FinSi
FinRépéter

Sortie :
Afficher C

La condition $\mathrm{A} > 5$ s'exprime $\mathrm{A} \geqslant 6$ soit encore $\mathrm{A} = 6$ ou $\mathrm{A} = 7$.

L'algorithme simule la répétition d'une épreuve de Bernoulli 9 fois de suite dans des conditions identiques indépendantes.
La valeur de C affichée à la fin de l'algorithme représente le nombre de fois où l'on a obtenu les nombres 6 ou 7 parmi les 9 répétitions.

X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = \frac{2}{7}$**.

V.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,2$.
Calculer $P(\text{X}\geqslant 5)$ (donner la valeur arrondie au millième).

Calculons $P(\text{X}\geqslant 5)$.

$$\begin{aligned} P(\text{X}\geqslant 5) &= 1-P(\text{X}<5) \\ &= 1-P(\text{X}\leqslant 4) \\ &\approx \mathbf{0{,}370} \quad \text{(valeur arrondie au millième)} \end{aligned}$$

On utilise la fonction de répartition de la loi binomiale sur la calculatrice (valeur de la fonction de répartition en 4).

VI.

A(1) B$(4-\text{i})$

• **Déterminons l'ensemble $E_1=\left\{\text{M}(z)\in P\,/\,|\,\text{i}\bar{z}\,|=3\right\}$.**

Soit M un point quelconque du plan d'affixe *z*.

$$\begin{aligned} \text{M}\in E_1 &\Leftrightarrow |\,\text{i}\bar{z}\,|=3 \\ &\Leftrightarrow |\,\text{i}\,|\times|\,\bar{z}\,|=3 \\ &\Leftrightarrow 1\times|\,z\,|=3 \quad (\text{car } |\,\text{i}\,|=1) \\ &\Leftrightarrow |\,z\,|=3 \\ &\Leftrightarrow \text{OM}=3 \end{aligned}$$

E_1 est le centre de centre O et de rayon 3.

• **Déterminons l'ensemble $E_2=\left\{\text{M}(z)\in P\,/\,|\,\bar{z}-4+\text{i}\,|=5\right\}$.**

$$\begin{aligned} \text{M}\in E_2 &\Leftrightarrow |\,\bar{z}-4+\text{i}\,|=5 \\ &\Leftrightarrow |\,\overline{z-4-\text{i}}\,|=5 \\ &\Leftrightarrow |\,z-4-\text{i}\,|=5 \\ &\Leftrightarrow |\,z-z_{\text{C}}\,|=5 \text{ avec C}(4+\text{i}) \\ &\Leftrightarrow \text{CM}=5 \end{aligned}$$

E_2 est le centre de centre C$(4+\text{i})$ et de rayon 5.

On peut noter que C est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Beaucoup d'élèves se sont trompés et ont dit que l'ensemble E_2 est le cercle de centre B et de rayon 5.

• **Déterminons l'ensemble $E_3=\left\{\text{M}(z)\in P\,/\,|\,1-z\,|=|\,4-\text{i}-z\,|\right\}$.**

$$\begin{aligned} \text{M}\in E_3 &\Leftrightarrow |\,1-z\,|=|\,4-\text{i}-z\,| \\ &\Leftrightarrow |\,z_{\text{A}}-z\,|=|\,z_{\text{B}}-z\,| \\ &\Leftrightarrow \text{AM}=\text{BM} \end{aligned}$$

E_3 est la médiatrice de [AB].

VII.

$z\in\mathbb{C}^*$

A(z) B$(\bar{z})$ C$\left(\dfrac{z^2}{\bar{z}}\right)$

Démontrons que les points A, B, C sont situés sur un même cercle.

$\text{OA}=|\,\bar{z}\,|=|\,z\,|$

$\text{OB}=|\,\bar{z}\,|=|\,z\,|$ (cours sur le module d'un nombre complexe)

$$\text{OC}=\left|\frac{z^2}{\bar{z}}\right|=\frac{|\,z^2\,|}{|\,\bar{z}\,|}=\frac{|\,z\,|^2}{|\,z\,|}=|\,z\,|$$

On a $OA = OB = OC$ donc on en déduit que les points A, B, C sont situés sur un même cercle de centre O (cercle de centre O et de rayon $|z|$).

Il était fondamental de relier distances et calculs de modules, c'est-à-dire d'écrire OA, OB, OC et de ne pas se contenter d'écrire les modules.

VIII.

Démontrons que $|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z| \Leftrightarrow |1+\mathrm{i}z|^2 = |1-\mathrm{i}z|^2$

$\Leftrightarrow (1+\mathrm{i}z)\left(\overline{1+\mathrm{i}z}\right) = (1-\mathrm{i}z)\left(\overline{1-\mathrm{i}z}\right)$

$\Leftrightarrow (1+\mathrm{i}z)\left(1-\mathrm{i}\overline{z}\right) = (1-\mathrm{i}z)\left(1+\mathrm{i}\overline{z}\right)$

$\Leftrightarrow \cancel{1} - \mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i}z + \cancel{z\overline{z}} = \cancel{1} + \mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i}z + \cancel{z\overline{z}}$

$\Leftrightarrow \cancel{1} - \mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i}z + \cancel{z\overline{z}} = \cancel{1} + \mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i}z + \cancel{z\overline{z}}$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}z = 2\mathrm{i}\overline{z}$

$\Leftrightarrow z = \overline{z}$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Autre méthode qu'il était demandé de ne pas adopter :

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z| \Leftrightarrow |1+\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)| = |1-\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)|$

$\Leftrightarrow |1-b+\mathrm{i}a| = |1+b-\mathrm{i}a|$

$\Leftrightarrow (1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2$

$\Leftrightarrow 1+b^2-2b+a^2 = 1+b^2+2b+a^2$

$\Leftrightarrow b = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Bonus :

1ère méthode :

Soit M un point d'affixe z.

$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z| \Leftrightarrow |\mathrm{i}(-\mathrm{i}+z)| = |\mathrm{i}(-\mathrm{i}-z)|$

$\Leftrightarrow |z-\mathrm{i}| = |-z-\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow |z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow$ $MA = MB$ avec $A(\mathrm{i})$ et $B(-\mathrm{i})$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]

$\Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des abscisses (car A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses)

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2e méthode :

$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z| \Leftrightarrow$ le point $M'(\mathrm{i}z)$ appartient à la médiatrice du segment reliant les points d'affixes 1 et – 1

$\Leftrightarrow$ $M'(\mathrm{i}z)$ est sur l'axe des ordonnées

$\Leftrightarrow \mathrm{i}z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$