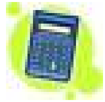
TS1

Contrôle du lundi 19 novembre 2012 (4 heures)



Partie commune (3 heures)

I. (5 points)

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)^2-2(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)+2=0$.

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on note A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_\mathrm{A}=1+\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B}=\overline{z_\mathrm{A}}$, $z_\mathrm{C}=2z_\mathrm{B}$, $z_\mathrm{D}=3$.

On considère également le point E défini par l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ et le point F d'affixe $z_\mathrm{F}=\mathrm{i}z_\mathrm{E}$.

Aucune figure n'est demandée sur la copie.

Démontrer que l'on a (CF) $\perp$ (AB).

II. (5 points)

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=1$ et $v_0=2$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1}=3u_n+2v_n$ et $v_{n+1}=2u_n+3v_n$.

On définit également les suites (x_n) et (y_n) par $x_n=u_n+v_n$ et $y_n=u_n-v_n$.

1°) Démontrer que (x_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire l'expression de x_n en fonction de *n*.

2°) Démontrer que (y_n) est une suite constante.

3°) Démontrer à l'aide des deux questions précédentes que pour tout entier naturel *n* on a :

$u_n=\dfrac{3\times 5^n-1}{2}$ et $v_n=\dfrac{3\times 5^n+1}{2}$.

4°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ et $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n et S'_n.

5°) En utilisant les relations de récurrence qui permettent de définir les suites (u_n) et (v_n) (sans utiliser les résultats de la question 3°)), écrire en langage naturel un algorithme qui demande à l'utilisateur une valeur de *n* en entrée et qui affiche en sortie les valeurs de u_n et v_n.

III. (5 points) QCM

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Faire un tableau sur la copie en complétant avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.
Écrire très lisiblement et sans rature.

1°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$ est :

a. $\mathbb{R}^*$ b. $[0\,;+\infty[$ c. $\mathbb{R}$ d. $]0\,;+\infty[$

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=x^2\mathrm{e}^x$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 a pour équation :

a. $y=-\dfrac{2x}{\mathrm{e}}$ b. $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$ c. $y=-\dfrac{x}{\mathrm{e}}$ d. $y=\dfrac{2x}{\mathrm{e}}$

3°) Pour tout réel *x*, $1-\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$ b. $-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ c. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ d. $-\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$

4°) La dérivée de la fonction $f :\ x \mapsto -\dfrac{2\mathrm{e}^x}{x+1}$ est donnée par :

a. $f'(x)=-\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ b. $f'(x)=-\dfrac{2x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ c. $f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ d. $f'(x)=\dfrac{2x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$

5°) Les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x+3=0$ sont :

a. 1 et 3 b. 0 et ln 3 c. e et e^3 d. e et ln 3

6°) La dérivée de la fonction $g :\ x \mapsto (4x^2+4)\mathrm{e}^x$ est donnée par :

a. $g'(x)=(4x^2+4)\mathrm{e}^x$ b. $g'(x)=8x\mathrm{e}^x$ c. $g'(x)=(4x^2+4x+4)\mathrm{e}^x$ d. $g'(x)=4(x+1)^2\,\mathrm{e}^x$

7°) L'expression $A(x)=(\mathrm{e}^x)^2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-2(1+\mathrm{e}^{2x})$ peut aussi s'écrire :

a. $A(x)=\mathrm{e}^{4x}-2$ b. $A(x)=\mathrm{e}^{4x}-1$ c. $A(x)=\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{2x}-1$ d. $A(x)=\mathrm{e}^{4x}+1$

8°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{e}^{-x}-2\leqslant 0$ est :

a. $[-2\,;+\infty[$ b. $[-\ln 2\,;+\infty[$ c. $]-\infty\,;-\ln 2]$ d. $]-\infty\,;2[$

9°) L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathrm{e}^{-x}+3)(\mathrm{e}^x-4)=0$ est :

a. $\{-\ln 3\,;\ln 4\}$ b. $\{\ln 3\,;\ln 4\}$ c. $\varnothing$ d. $\{\ln 4\}$

10°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^2\mathrm{e}^{-x}$ est :

a. $]-\infty\,;1]$ b. $\mathbb{R}$ c. $]-\infty\,;0]\cup[1\,;+\infty[$ d. $[0\,;1]$

IV. (6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1$.

1°) Étudier les variations de la fonction g.

2°) a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de α.

c) Démontrer que l'on a $\mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

3°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit S la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $S(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $S'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

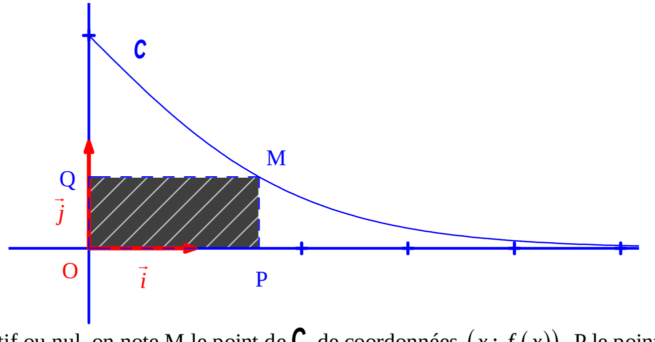
2°) En déduire les variations de la fonction S sur $[0\,;+\infty[$.

3°) Démontrer que $S(\alpha)=4(\alpha-1)$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.



Pour tout réel x positif ou nul, on note M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x\,;f(x))$, P le point de coordonnées $(x\,;0)$ et Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1°) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
On rappelle que le réel α a été défini dans la partie A.
2°) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point M a pour abscisse α.
Démontrer que la tangente T en M à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite (PQ).

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \left(e^x\right)^2 \times e^{y-2} = 1 \\ e^{x-y} = e \end{cases}$.

II. (6 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Démontrer que pour tout réel x on a :

$\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 = 1$; $2\left[f(x)\right]^2 - 1 = f(2x)$; $g(2x) = 2g(x) \times f(x)$.

III. (11 points)

On considère la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^3}$.

1°) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.

2°) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3 ; 4]$.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 2 par défaut de α.
c) Justifier brièvement que l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution dans les intervalles $]2 ; 3[$ et $]4 ; +\infty[$.

3°) On considère l'algorithme de dichotomie suivant permettant d'encadrer α.

Initialisations :
a prend la valeur 3
b prend la valeur 4

Traitement :
Tantque $b - a > 0{,}01$ **Faire**
  c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(c) > 2$ alors
    a prend la valeur c
  Sinon
    b prend la valeur c
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a et b

a) Justifier brièvement le choix des valeurs initiales 3 et 4 pour a et b.

b) Que peut-on dire de l'amplitude de l'intervalle obtenu à la fin de l'algorithme ?

c) Dérouler pas à pas les quatre premières étapes de l'algorithme en remplissant les cases vides du tableau suivant (à recopier sur la copie) :

Étape	Test $b - a > 0{,}01$	c	Test $f(c) > 2$	a	b
Initialisations				3	4
1	vrai	3,5	vrai		
2					
3					
4					

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

Après les deux premières étapes, quel encadrement de α obtient-on ?
Et après les quatre premières étapes, quel encadrement de α obtient-on ?
Justifier la cohérence du résultat avec la question 2°) c).

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (5 points)

Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \quad (\boldsymbol{R}).$$

1°) Démontrer que ($\boldsymbol{R}$) est équivalente à $(x-4)(y-2)=8$.

2°) Conclure (on pourra ne pas détailler que les grandes étapes du raisonnement).

II. (4 points)

Démontrer à l'aide des congruences que pour tout entier naturel n le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

Question bonus (à faire à la fin uniquement s'il reste du temps) :

Retrouver le résultat précédent grâce à une démonstration par récurrence.

III. (4 points)

On considère l'équation $7x^2+2y^3=3$ (E), avec x et y entiers relatifs.

1°) Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide d'entiers compris entre 0 et 6.

$y \equiv \ldots$ (mod. 7)	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv \ldots$ (mod. 7)							
$2y^3 \equiv \ldots$ (mod. 7)							

2°) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution.

IV. (7 points)

On considère l'algorithme suivant.

Entrée :
Saisir A

Traitement :
Tantque $A \geqslant 3$ **Faire**
    A prend la valeur $A-7$
FinTantque

Sortie :
Afficher A

1°) Quelle sera le nombre affiché en sortie :
a. si l'on saisit la valeur 3 pour A en entrée ?
b. si l'on saisit la valeur 4 pour A en entrée ?
c. si l'on saisit la valeur 7 pour A en entrée ?
d. si l'on saisit la valeur 8 pour A en entrée ?

Répondre sans détailler les calculs (on pourra faire un tableau).

2°) Quelles sont les sorties possibles lorsque l'on prend pour entrée un entier naturel quelconque A ?

3°) Justifier brièvement que la sortie obtenue est congrue modulo 7 à l'entier naturel A donné en entrée.

4°) Réécrire l'algorithme en le modifiant de telle sorte que la sortie soit un entier relatif compris au sens large entre – 3 et 3, congru modulo 7 à l'entrée, cette entrée pouvant être un entier naturel quelconque.

5°) Modifier l'algorithme afin que la sortie soit un entier relatif compris au sens large entre – 3 et 3, congru modulo 7 à l'entrée, cette entrée pouvant être un entier relatif quelconque.

Corrigé

Partie commune

I.

1°) a) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$ (1).**

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.

Le discriminant réduit de (1) est égal à $\Delta'=-1$.

$\Delta'<0$ donc (1) admet deux racines complexes conjuguées :

$z_1=1+\mathrm{i}$ $\qquad$ $z_2=1-\mathrm{i}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{1+\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\}$.

b) **Déduisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)^2-2(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)+2=0 \quad (2)$.**

On pose $Z=-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3$.

(2) s'écrit alors $Z^2-2Z+2=0 \quad (2')$.

D'après la question a),

$(2') \Leftrightarrow Z=1+\mathrm{i}$ ou $Z=1-\mathrm{i}$

Par suite,

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow -\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3=1+\mathrm{i} \text{ ou } -\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3=1-\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{i}z=2+2\mathrm{i} \text{ ou } \mathrm{i}z=2+4\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{2+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \text{ ou } z=\frac{2+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\ &\Leftrightarrow z=2-2\mathrm{i} \text{ ou } z=4-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2) sont $4-2\mathrm{i}$ et $2-2\mathrm{i}$.

2°) $z_A=1+\mathrm{i}$, $z_B=\overline{z_A}=1-\mathrm{i}$, $z_C=2z_B=2-2\mathrm{i}$, $z_D=3$

$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{DC}$

$z_F=\mathrm{i}z_E$

Démontrons que (CF) $\perp$ (AB).

$\overrightarrow{DC}\,(-1-2\mathrm{i})$

$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{DC}$ d'où $z_E=2(-1-2\mathrm{i})$ donc $z_E=-2-4\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}z_F&=\mathrm{i}z_E\\ &=\mathrm{i}(-2-4\mathrm{i})\\ &=4-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}\,(-2\mathrm{i})$ donc (AB) est parallèle à l'axe des imaginaires purs.

$\overrightarrow{CF}\,(2)$ donc (CF) est parallèle à l'axe des réels.

Or le repère est orthonormé donc les axes sont orthogonaux.

Par suite, (CF) $\perp$ (AB).

II.

(u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=1$ et $v_0=2$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1}=3u_n+2v_n$ et $v_{n+1}=2u_n+3v_n$.

Les suites (x_n) et (y_n) sont définies par $x_n=u_n+v_n$ et $y_n=u_n-v_n$.

1°) **Démontrons que (x_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.**

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad x_{n+1}&=u_{n+1}+v_{n+1}\\ &=3u_n+2v_n+2u_n+3v_n\\ &=5(u_n+v_n)\\ &=5x_n\end{aligned}$$

On en déduit que (x_n) est une suite géométrique de premier terme $x_0=3$ et de raison 5.

Déduisons-en l'expression de x_n en fonction de *n*.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n&=x_0\times 5^n\\ &=3\times 5^n\end{aligned}$$

2°) **Démontrons que (y_n) est une suite constante.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= (3u_n + 2v_n) - (2u_n + 3v_n) \\ &= u_n - v_n \\ &= y_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (y_n) est constante.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} y_n &= y_0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

3°) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{3\times 5^n - 1}{2}$ et $v_n = \dfrac{3\times 5^n + 1}{2}$.**

D'après les questions précédentes, on a : $\begin{cases} u_n + v_n = 3\times 5^n \\ u_n - v_n = -1 \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} u_n = \dfrac{3\times 5^n - 1}{2} \\ v_n = \dfrac{3\times 5^n + 1}{2} \end{cases}$ (addition membre à membre ; soustraction membre à membre)

4°)

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
$S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

Déterminons une expression simplifiée de S_n et S'_n.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{3\times 5^k - 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} \left(3\times 5^k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \left(3\times 5^k \right) - \sum_{k=0}^{k=n} 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \sum_{k=0}^{k=n} 5^k - (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \frac{5^{n+1} - 1}{5-1} - (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \frac{5^{n+1} - 1}{4} - (n+1) \right] \\ &= 3\times \frac{5^{n+1} - 1}{8} - \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{3\times 5^{n+1} - 3 - 4(n+1)}{8} \\ &= \frac{3\times 5^{n+1} - 4n - 7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} v_k \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{3\times 5^k + 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} \left(3\times 5^k + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \left(3\times 5^k \right) + \sum_{k=0}^{k=n} 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \sum_{k=0}^{k=n} 5^k + (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \frac{5^{n+1} - 1}{5-1} + (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3\times \frac{5^{n+1} - 1}{4} + (n+1) \right] \\ &= 3\times \frac{5^{n+1} - 1}{8} + \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{3\times 5^{n+1} - 3 + 4(n+1)}{8} \\ &= \frac{3\times 5^{n+1} + 4n + 1}{8} \end{aligned}$$

5°) **Écrivons en langage naturel un algorithme qui demande à l'utilisateur une valeur de n en entrée et qui affiche en sortie les valeurs de u_n et v_n.**

Entrée :
Saisir n (entier naturel non nul)

Initialisations :
U prend la valeur 1
V prend la valeur 2

Traitement :
Pour K allant de 0 à $n-1$ **Faire**
    A prend la valeur U
    U prend la valeur $3\text{U}+2\text{V}$
    V prend la valeur $2\text{A}+3\text{V}$
FinPour

Sortie :
Afficher U
Afficher V

III.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	d	c	a	b	b	d	b	b	d	c

3°) Pour tout réel x, $1-\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1-\left(1-e^{-x}\right)}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}\times e^{-x}}{e^{x}\times\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{1}{e^{x}+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{1+e^{x}}$ b. $-\dfrac{1}{1+e^{x}}$ c. $\dfrac{1}{1+e^{x}}$ d. $-\dfrac{2}{1+e^{x}}$

7°) L'expression $A(x)=\left(e^{x}\right)^{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-2\left(1+e^{2x}\right)$ peut aussi s'écrire

a. $A(x)=e^{4x}-2$ b. $A(x)=e^{4x}-1$ c. $A(x)=e^{4x}-2e^{2x}-1$ d. $A(x)=e^{4x}+1$

$$\begin{aligned}A(x)&=\left(e^{x}\right)^{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-2\left(1+e^{2x}\right)\\&=e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)-2\left(1+e^{2x}\right)\\&=e^{4x}+1+2e^{2x}-2\left(1+e^{2x}\right)\\&=e^{4x}-1\end{aligned}$$

IV.

Partie A

$g : x \mapsto e^{x}-xe^{x}+1$ définie sur $[0\,;+\infty[$

1°) **Étudions les variations de la fonction g.**

$$\forall x\in[0\,;+\infty[\quad \begin{aligned}g'(x)&=e^{x}-\left(1\times e^{x}+x\times e^{x}\right)\\&=-xe^{x}\end{aligned}$$

x	0		$+\infty$
Signe de $-x$	0	$-$	
Signe de e^{x}		$+$	
Signe de $g'(x)$	0	$-$	
Variations de g	2	$\searrow$	

La fonction g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2°) a) **Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.**

g est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc par restriction, sur $[1\,;2]$ et strictement décroissante.

On a : $g(1)=1$ et $g(2)=e^{2}-2e^{2}+1=1-e^{2}$.

$g(1)>0$ et $g(2)<0$

0 est compris entre $g(1)$ et $g(2)$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans [1 ; 2].

b) **À l'aide de la calculatrice, déterminer l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de α.**

On peut utiliser la méthode de balayage ou en utiliser les options avancées de la calculatrice.

Avec la calculatrice, on obtient $g(1,27)>0$ et $g(1,28)<0$ donc $1,27<\alpha<1,28$.

On en déduit que l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de α est 1,27.

c) **Démontrons que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.**

Pour cette question, on doit travailler avec les valeurs exactes et non avec des valeurs approchées.

On sait que $g(\alpha)=0$ donc $e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1=0\quad(1)$.

(1) donne $1=-e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}$

D'où $1=(\alpha-1)e^{\alpha}$.

Donc $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

3°) **Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.**

Grâce au tableau de variations de g, on obtient immédiatement le signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

$S : x \mapsto \dfrac{4x}{e^x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$

1°) **Démontrons que pour tout réel x positif ou nul, $S'(x)$ a le même signe que $g(x)$.**

On calcule la dérivée de S.

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\quad S'(x) = 4\times\frac{1\times(e^x+1)-x\times e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= 4\times\frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

$\forall x \in [0\,;+\infty[\quad (e^x+1)^2>0$ donc $S'(x)$ a le même signe de $g(x)$.

2°) **Déduisons-en les variations de la fonction S sur $[0\,;+\infty[$.**

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $S'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de S	0	$\nearrow$	$S(\alpha)$	$\searrow$	

3°) **Démontrons que $S(\alpha)=4(\alpha-1)$.**

On a : $S(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{e^\alpha+1}$.

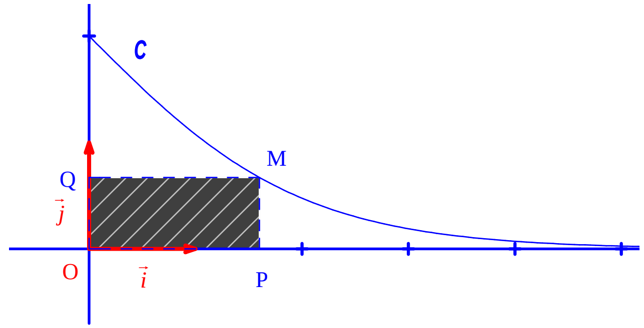
Or on a démontré dans la question 2°) c) de la partie A, que : $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

$$\text{Donc } S(\alpha)=\frac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}$$
$$=\frac{4\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}$$
$$=\frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}$$
$$=4(\alpha-1)$$

Partie C

$f : x \mapsto \dfrac{4}{e^x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$

$\mathcal{C}$: courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$



$x \geqslant 0$

$\mathrm{M}(x\,;f(x))$

$\mathrm{P}(x\,;0)$

$\mathrm{Q}(0\,;f(x))$

1°) **Démontrons que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.**

$$\mathcal{A}_{\text{OMPQ}} = \text{OP} \times \text{OQ}$$
$$= x \times f(x) \qquad \text{(car } x \geqslant 0\text{, } f(x) \geqslant 0 \text{ et le repère est orthonormé)}$$
$$= \frac{4x}{e^x + 1}$$
$$= S(x)$$

D'après la question 2°) de la partie B, S admet un maximum sur $[0\,;+\infty[$; ce maximum est atteint pour $x = \alpha$.

Donc l'aire de OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2°) $M(\alpha\,;f(\alpha))$

Démontrons que la tangente *T* en M à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite (PQ).

Cette question était beaucoup plus difficile. On pouvait la traiter de deux manières.

1ère méthode : calculatoire

On calcule le coefficient directeur de *T*.

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\quad f'(x) = -\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

On a démontré que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

$$f'(\alpha) = -\frac{4e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}+1\right)^2}$$
$$= -\frac{4 \times \frac{1}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}$$
$$= -\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2}$$
$$= -\frac{4}{\alpha-1} \times \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2$$
$$= -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à :

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha)-0}{0-\alpha}$$
$$= \frac{\frac{4}{e^{\alpha}+1}}{-\alpha}$$
$$= \frac{\frac{4}{\frac{1}{\alpha-1}+1}}{-\alpha}$$
$$= \frac{\frac{4}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{-\alpha}$$
$$= -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Donc *T* // (PQ).

2e méthode : avec peu de calculs

On a démontré que : $S(x) = x \times f(x)$.

Donc $S'(x) = x \times f'(x) + f(x)$.

Or $S'(\alpha) = 0$ donc $\alpha \times f'(\alpha) + f(\alpha) = 0$.

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;f'(\alpha))$ est un vecteur directeur de la tangente *T*.

$$\overrightarrow{\text{PQ}}\,(-\alpha\,;f(\alpha))$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ f'(\alpha) & f(\alpha) \end{vmatrix} = \alpha \times f'(\alpha) + f(\alpha) = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\text{PQ}}$ sont colinéaires donc *T* // (PQ).

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas fait la spécialité

I. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases} \left(e^x\right)^2 \times e^{y-2} = 1 \\ e^{x-y} = e \end{cases}$.

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} \times e^{y-2} = 1 \\ e^{x-y} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x+y-2} = 1 \\ e^{x-y} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2 = 0 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 2 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ 3y = 0 \end{cases} \quad \text{(méthode par combinaisons linéaires)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La solution du système est le couple (1 ; 0).

II.

$$f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

• Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}\ \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

• Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}\ 2\left[f(x)\right]^2 - 1 = f(2x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2\left[f(x)\right]^2 - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2}{2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

$$= f(2x)$$

• Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}\ g(2x) = 2f(x) \times g(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2f(x) \times g(x) = 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \cancel{2} \times \frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$= g(2x)$$

III. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^3}$ définie sur $\left]2\,;+\infty\right[$

1°) **Déterminons le sens de variation de la fonction *f* sur $\left]2\,;+\infty\right[$.**

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $\left]2\,;+\infty\right[$.

$$\forall x \in \left]2\,;+\infty\right[\quad f\,'(x) = -\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^4}$$

$$-\dfrac{3}{2\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^4}$$

$\forall x \in \left]2\,;+\infty\right[\quad f\,'(x) < 0$ donc *f* est strictement décroissante sur $\left]2\,;+\infty\right[$.

x	2		$+\infty$
SGN de $f\,'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖	↘	

2°) a) **Démontrons que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3\,;4]$.**

- *f* est une fonction rationnelle définie sur $\left]2\,;+\infty\right[$ donc elle est continue sur cet intervalle et par restriction elle est continue sur l'intervalle $[3\,;4]$.

- *f* est une fonction strictement décroissante sur $\left]2\,;+\infty\right[$ donc *f* est strictement décroissante sur $[3\,;4]$.

- $f(3)=8>2$ et $f(4)=1>2$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3\,;4]$.

b) **À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 2 par défaut de α.**

$f(3{,}58)=2{,}02823711...$ donc $f(3{,}58)>2$.
$f(3{,}59)=1{,}99020867...$ donc $f(3{,}59)\approx 1{,}99<2$

On a donc : $3{,}58<\alpha<3{,}59$ donc **la valeur décimale approchée d'ordre 2 par défaut de α est 3,58**.

c) **Justifions brièvement que l'équation $f(x)=2$ n'admet pas de solution dans les intervalles $\left]2\,;3\right[$ et $\left]4\,;+\infty\right[$.**

Sur $\left]2\,;3\right]$, la fonction *f* est décroissante, son minimum est $f(3)=8$.

Sur $\left[4\,;+\infty\right[$, la fonction *f* est décroissante, son maximum est $f(4)=1$.

L'équation $f(x)=2$ n'admet donc pas de solution dans les intervalles $\left]2\,;3\right[$ et $\left]4\,;+\infty\right[$.

3°)
a) **Justifions brièvement le choix des valeurs initiales 3 et 4 pour *a* et *b*.**

On a démontré à la question 2°) a) l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3\,;4]$.
Cela justifie le choix de 3 et 4 pour valeurs initiales de *a* et *b*.

b) **Que pouvons-nous dire de l'amplitude de l'intervalle obtenu à la fin de l'algorithme ?**

L'amplitude de l'intervalle obtenue à la fin de l'algorithme est inférieure ou égale à 10^{-2}.

c) **Déroulons pas à pas les quatre premières étapes de l'algorithme en remplissant les cases vides du tableau suivant.**

Étape	Test $b-a>0{,}01$	c	Test $f(c)>2$	a	b
Initialisations				3	4
1	vrai	3,5	vrai	3,5	4
2	vrai	3,75	faux	3,5	3,75
3	vrai	3,625	faux	3,5	3,625
4	vrai	3,5625	vrai	3,5625	3,625

Après les deux premières étapes, quel encadrement de α obtient-on ?

On obtient $3{,}5<\alpha<3{,}75$.

Et après les quatre premières étapes, quel encadrement de α obtient-on ?

On obtient $3{,}5<\alpha<3{,}625$.

Justifions la cohérence du résultat avec la question 2°) c).

La valeur trouvée à la question 2°) c) 3,59 appartient à $[3{,}5\,;\,3{,}625]$, donc ces résultats sont cohérents.

On peut vérifier en programmant sur calculatrice.

Corrigé de la partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques

I. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ (**R**) $\quad (x\,;y)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

1°) **Démontrons que (R) est équivalente à $(x-4)(y-2)=8$.**

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2y+x}{xy}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(2y+x)=xy \Leftrightarrow 4y+2x-xy=0$

$(x-4)(y-2)=8 \Leftrightarrow xy-2x-4y+8=8 \Leftrightarrow 4y+2x-xy=0$

D'où l'équivalence : $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (x-4)(y-2)=8$.

2°) **Concluons.**

Si x et y sont solutions de (E) alors $x-4$ et $y+8$ sont des diviseurs associés de 8.

Les diviseurs de 8 sont : – 1, – 2, – 4, – 8, 1, 2, 4, 8.

Les systèmes possibles sont donc :

① $\begin{cases}x-4=-1\\y-2=-8\end{cases}$	② $\begin{cases}x-4=-2\\y-2=-4\end{cases}$	③ $\begin{cases}x-4=-4\\y-2=-2\end{cases}$	④ $\begin{cases}x-4=-8\\y-2=-1\end{cases}$
⑤ $\begin{cases}x-4=1\\y-2=8\end{cases}$	⑥ $\begin{cases}x-4=2\\y-2=4\end{cases}$	⑦ $\begin{cases}x-4=4\\y-2=2\end{cases}$	⑧ $\begin{cases}x-4=8\\y-2=1\end{cases}$

Les systèmes à retenir sont ⑤, ⑥, ⑦ et ⑧ (les quatre premiers donnant des résultats négatifs).
On obtient les couples (5 ; 10), (6 ; 6), (8 ; 4) et (12 ; 3).

On vérifie que ces quatre résultats conviennent.

II.

Démontrons que pour tout entier naturel *n* le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

On a : $3^3=27$
Or $27\equiv 2\ [5]$
Donc $3^3\equiv 2\quad[5]$
Par suite : $3^{3n}\equiv 2^n\quad[5]$.

Par ailleurs, $3^2=9$ donc $3^2\equiv 4\ [5]$.

Par conséquent, $3^{3n+2}\equiv 2^n\times 4\ [5]$ d'où $3^{3n+2}\equiv 2^{n+2}\ [5]$.

Par suite, $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 2^{n+2}+2^{n+4}\ [5]$.

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 2^{n+2}(1+4)\ [5]$

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 5\times 2^{n+2}\ [5]$

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0\ [5]$

Donc on en déduit que pour tout entier naturel n le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

Question bonus :

Retrouvons le résultat précédent grâce à une démonstration par récurrence.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5 ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

On a : $3^{3\times 0+2}+2^{0+4}=3^2+2^4$
$=9+16$
$=25$

25 est divisible par 5 donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $3^{3k+2}+2^{k+4}$ est divisible par 5.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

On a :

$$3^{3k+2}+2^{k+4}=3^{3(k+1)+2}+2^{(k+1)+4}$$
$$=3^{3k+2}\times 3^3+2^{k+4}\times 2$$
$$=\left(3^{3k+2}+2^{k+4}\right)\times 2+3^{3k+2}\times\left(3^3-2\right)$$
$$=\left(3^{3k+2}+2^{k+4}\right)\times 2+3^{3k+2}\times 25$$

Or : $3^{3k+2}+2^{k+4}$ est divisible par 5 par hypothèse de récurrence et 25 est divisible par 5.
Donc $3^{3k+2}+2^{k+4}$ est divisible par 5.

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

III.

$7x^2+2y^3=3$ (E) (*x* et *y* entiers relatifs)

1°) **Complétons le tableau à l'aide d'entiers compris entre 0 et 6.**

$y\equiv \ldots$ (mod. 7)	0	1	2	3	4	5	6
$y^3\equiv \ldots$ (mod. 7)	0	1	1	6	1	6	6
$2y^3\equiv \ldots$ (mod. 7)	0	2	2	5	2	5	5

2°) **Déduisons-en que l'équation (E) n'a pas de solution.**

On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs solution de (E) [on peut aussi écrire $(x_0, y_0)\in\mathbb{Z}^2$].

On a alors $7{x_0}^2+2{y_0}^3=3$ d'où $2{y_0}^3=3-7{x_0}^2$.

On a donc : $2{y_0}^3\equiv 3$ (mod. 7).

D'après le tableau de congruence précédent, nous observons que ce n'est pas possible.
On en déduit que l'équation (E) n'a pas de solution.

IV.

Entrée :
Saisir A

Traitement :
Tantque $A\geqslant 3$ **Faire**
| A prend la valeur $A-7$
FinTantque

Sortie :
Afficher A

1°)

Entrée	3	4	7	8
Sortie	– 4	– 3	0	1

2°) **Déterminons les sorties possibles lorsque l'on prend pour entrée un entier naturel quelconque *A*.**

Les sorties possibles pour un entier naturel *n* quelconque sont : – 4 ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 et 2.

3°) **Justifions que la sortie obtenue est congrue modulo 7 à l'entier naturel *A* donné en entrée.**

La différence entre la valeur de *A* en entrée et le nombre obtenu en sortie est un multiple de 7 donc ces deux nombres sont congrus modulo 7.

Lorsque l'on fait tourner l'algorithme, on soustrait 7 à *A* un certain nombre *x* de fois.
On a donc : $A_{\text{initial}}=7\times x+A_{\text{final}}$.
Donc 7 divise $A_{\text{final}}-A_{\text{initial}}$.

On peut en conclure A_{initial} et A_{final} son congrus modulo 7.

La sortie obtenue est congrue modulo 7 au nombre de départ car on retire 7 jusqu'à obtenir un résultat inférieur ou égal à 7.

Si on note *a* la valeur de la variable *A* en entrée, la sortie est égale à $a-7q$ où *q* est un entier naturel.
Or $a-7q\equiv a$ [7].
Donc la sortie est bien congrue à *a* modulo 7.

4°) **Réécrivons l'algorithme en le modifiant de telle sorte que la sortie soit un entier relatif compris au sens large entre – 3 et 3, congru modulo 7 à l'entrée, cette entrée pouvant être un entier naturel quelconque.**

On remplace la condition $A \geqslant 3$ par $A > 3$ ou $A \geqslant 4$.

Entrée :
Saisir A

Traitement :
Tantque $A > 3$ **Faire**
  A prend la valeur $A - 7$
FinTantque

Sortie :
Afficher A