TS

Exercices sur les fonctions cosinus et sinus

1 Dans chaque cas, démontrer que la fonction *f* dont l'expression est donnée est périodique de période T.

1°) $f(x)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$ et $T=\frac{2\pi}{5}$

2°) $f(x)=\cos 6x+\sin 3x$ et $T=\frac{2\pi}{3}$

3°) $f(x)=\cos^2 x-3\sin(2x)$ et $T=\pi$

2 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

1°) $f(x)=2\cos(5x)$ 2°) $f(x)=4\sin^3 x$ 3°) $f(x)=\frac{3}{2+\cos x}$

3 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=3+4\cos(5x)$.

Démontrer que *f* est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
Calculer $f'(x)$.

5 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\cos(2x)$.

Étudier les variations de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

6 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

Démontrer que *f* est périodique.

7 On considère la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin x+\sin(2x)$.

1°) Justifier que *f* est périodique de période 2π.
Étudier la parité de *f*.
En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction *f* sur l'intervalle $I=[0\,;\pi]$.

2°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

3°) a) Pour étudier le signe de $f'(x)$ pour $x\in I$, on doit étudier le signe de chaque facteur.

Étude du signe de $2\cos x-1$ pour $x\in I$.
On résout deux inéquations et une équation dans l'intervalle I.

$2\cos x-1>0$	$2\cos x-1<0$	$2\cos x-1=0$

Étude du signe de $\cos x+1$ pour $x\in I$.
On résout deux inéquations et une équation dans l'intervalle I.

$\cos x+1>0$	$\cos x+1<0$	$\cos x+1=0$

b) Faire un tableau récapitulatif comprenant :
- l'étude du signe de $f'(x)$ pour $x\in I$;
- les variations de *f* sur I.

Calculer les extremums locaux (valeurs exactes).

Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4°) Tracer la représentation graphique de *f* sur l'intervalle I dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; on prendra le centimètre pour unité graphique.

On commencera par placer les points correspondants aux extremums locaux de *f* sur I.
Tracer des pointillés et marquer leurs coordonnées sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Tracer les tangentes horizontales en ces points.
Compléter la représentation graphique pour obtenir la représentation graphique sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.

Vérifier le tracé à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur ou d'une calculatrice graphique (attention à penser à mettre la calculatrice en mode radian si elle n'y est pas déjà).

8 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1°) Étudier la parité et la périodicité de *f*.
En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction *f* sur l'intervalle $I=[0\,;\pi]$.

2°) Démontrer que, pour tout réel *x*, on a $f'(x)=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$.

3°) Résoudre dans l'intervalle I à l'aide du cercle trigonométrique les inéquations et l'équation ci-dessous.

$2\cos x+1>0$ (1)	$2\cos x+1<0$ (2)	$2\cos x+1=0$ (3)

(Il n'est pas demandé de donner les ensembles de solutions.)

4°) Faire un tableau récapitulatif comprenant :
- l'étude du signe de $f'(x)$ pour $x\in I$;
- les variations de *f* sur I.

Calculer les extremums locaux (valeurs exactes) ainsi que la valeur de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5°) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de *f* sur l'intervalle I dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1$ cm et $\|\vec{j}\|=3$ cm.

On commencera par placer les points correspondants aux extremums locaux de *f* sur I.
Tracer des pointillés et marquer leurs coordonnées sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Tracer les tangentes horizontales en ces points.

Compléter la représentation graphique pour obtenir la représentation graphique sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Vérifier le tracé à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur ou d'une calculatrice graphique (attention à penser à mettre la calculatrice en mode radian si elle n'y est pas déjà).

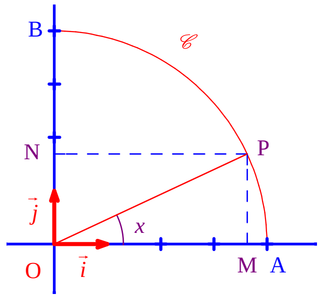
$\boxed{9}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}$.

Déterminer, en rédigeant soigneusement, l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.

$\boxed{10}$ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le point P appartient au quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 4 et d'extrémités $\text{A}(4 ; 0)$ et $\text{B}(0 ; 4)$.
On construit le rectangle ONPM où M appartient à [OA] et N à [OB].

Reproduire la figure ci-dessous.



On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{AOP}}$.

1°) À quel intervalle I appartient x ?
2°) Démontrer que l'aire de ONPM est $\mathscr{A}(x) = 8\sin 2x$.
3°) En déduire pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ONPM est maximale.

$\boxed{11}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1°) Démontrer que f est périodique de période π.
2°) On se place sur l'intervalle $E = \left[-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

a) Quel intervalle décrit $X = 2x + \dfrac{\pi}{3}$ quand x décrit E ?
b) Étudier le sens de variation de f sur E.
3°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
a) Tracer $\mathscr{C}$ sur E dans le cahier.
b) On admet que le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{3} ; 0\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

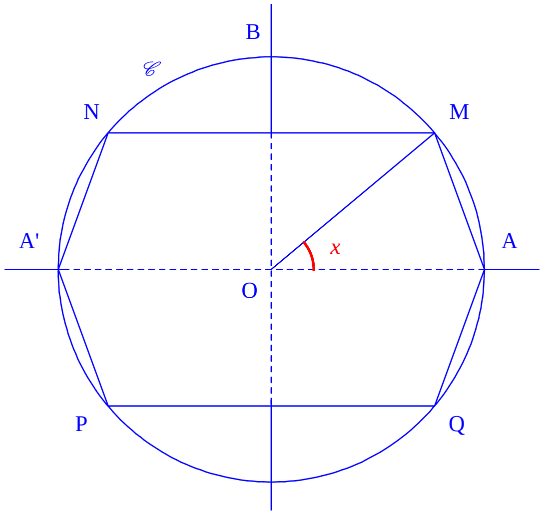
En déduire le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left[\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ puis sur $[-\pi ; 2\pi]$.

$\boxed{12}$ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On note A, B, A' les points de coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(-1 ; 0)$.

Pour tout réel $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on place le point M de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ tel que $\widehat{\text{AOM}} = x$.

Les points N, P, Q sont les symétriques de M par rapport aux axes et à l'origine du repère.



Reproduire la figure.

1°) Démontrer que l'aire $S(x)$ de l'hexagone AMNA'PQ est égale à $2\sin x(1 + \cos x)$.
2°) Démontrer que l'on a : $S'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3°) a) Dresser un tableau comprenant l'étude du signe de $S'(x)$ (après étude préalable) et les variations de S.
b) Pour quelle valeur de x l'hexagone a-t-il une aire maximale ? Que peut-on dire de l'hexagone dans ce cas ?

$\boxed{13}$ À l'aide de la calculatrice donner les arrondis automatiques au millième des solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ des équations suivantes :

$\cos x = -\dfrac{1}{3}$ (1) ; $\sin x = \dfrac{1}{4}$ (2) ; $\sin x = -\dfrac{3}{4}$ (3).

Corrigé

Faire les traits à la règle (tableaux et flèches de variations).

Régler la fenêtre graphique

$X\min = -3\pi$; $X\max = 3\pi$
$Xscl = \pi$
$Y\min = -2$; $Y\max = 2$
$Yscl = 1$

On tape bien π.

Les fractions avec π ne s'écrivent jamais avec des barres obliques.

Question Alexandre Cots le lundi 14-12-2015 :

Il n'y a pas vraiment de moyen de démontrer qu'une fonction est périodique en partant directement de *f*.

1

On refait la démonstration dans chaque cas.
Vérifier sur la calculatrice graphique (mettre la calculatrice en mode radian).

Rappel de définition :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
T est un réel strictement positif.

On dit que *f* est **périodique de période *T*** pour exprimer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.

1°) $\boldsymbol{f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$ **et** $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{5}}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) &= f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\\ &= \cos\left[5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right]\\ &= \cos\left(2\pi + 5x - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que *f* est périodique de période $T = \frac{2\pi}{5}$.

2°) $\boldsymbol{f(x) = \cos 6x + \sin 3x}$ et $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) &= f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left[6\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] + \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ &= \cos(6x + 4\pi) + \sin(3x + 2\pi)\\ &= \cos 6x + \sin 3x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que *f* est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$.

3°) $f(x)=\cos^2 x-3\sin(2x)$ et $T=\pi$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+T)=f(x+\pi)$$
$$=\cos^2(x+\pi)-3\sin[2(x+\pi)]$$
$$=[\cos(x+\pi)]^2-3\sin(2x+2\pi)$$
$$=(-\cos x)^2-3\sin 2x$$
$$=\cos^2 x-3\sin 2x$$
$$=f(x)$$

On en déduit que *f* est périodique de période $T=\pi$.

$\boxed{2}$

1°) $f(x)=2\cos(5x)$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$

On applique la règle du cours : $[\cos(ax+b)]'=-a\sin(ax+b)$ (où a et b sont deux réels).
On prend : $a=5$ et $b=0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2(-5\sin 5x)=-10\sin 5x$$

2°) $f(x)=4\sin^3 x$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$

On pose $u(x)=\sin x$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction de référence) et $\forall x\in\mathbb{R}\ \ u'(x)=\cos x$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=4\times[u(x)]^3$$

Donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les opérations algébriques pour les fonctions dérivables).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=4\times 3\times u'(x)\times[u(x)]^2$$
$$=12\times u'(x)\times[u(x)]^2$$
$$=12\times\cos x\times\sin^2 x$$

Attention à bien différencier dans le cours, dérivée de fonction et dérivé d'une forme (du type $x^3\to 3x^2$ et $u^n\to nu'u^{n-1}$)

On utilise la formule de dérivation suivante : $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

3°) $f(x)=\dfrac{3}{2+\cos x}$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ (la recherche de cet ensemble de définition est quasiment évidente)

On pose $u(x)=2+\cos x$.
$\forall x\in\mathbb{R}\ \ u'(x)=-\sin x$

On a : $f(x)=\dfrac{3}{u(x)}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les opérations algébriques pour les fonctions dérivables).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-\frac{3(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{3\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

On applique la formule de dérivée de $\left(\dfrac{k}{u}\right)'=-k\dfrac{u'}{u^2}$ (en écrivant que $\dfrac{k}{u}=k\times\dfrac{1}{u}$)

$\boxed{3}$ $f(x)=3+4\cos(5x)$

On démontre que $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leqslant f(x)\leqslant 7$ (méthode des encadrements successifs).

Solution détaillée :

Démontrons que *f* est bornée.

Rappel :

On dit qu'une fonction *f* définie sur $\mathscr{D}$ est bornée pour exprimer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x\in\mathscr{D}$, on ait $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Dire que *f* est bornée par m et M signifie que *f* est minorée par un nombre m et que *f* est majorée par un nombre M.

Graphiquement, dire que *f* est bornée par m et M signifie que la courbe représentative de *f* est comprise dans la zone située entre les droites d'équation $y=m$ et $y=M$ (comme ces deux droites sont parallèles, on parle de « bande » délimitée par ces deux droites).

Les fonctions cosinus et sinus sont bornées.

On cherche donc à encadrer $f(x)$ par deux nombres fixes.
On procède par encadrements successifs.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad -1\leqslant \cos 5x\leqslant 1$

(on utilise le fait que la fonction cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$ par – 1 et 1 ; le cosinus de n'importe quoi est compris entre – 1 et 1 au sens large)

$$\xrightarrow{\times 4}$$

$$-4\leqslant 4\cos 5x\leqslant 4$$

$$\xrightarrow{+3}$$

$$-1\leqslant 3+4\cos 5x\leqslant 7$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad -1\leqslant f(x)\leqslant 7$

On en conclut que *f* est bornée sur $\mathbb{R}$ (– 1 est un minorant de *f* ; et 7 est un majorant de *f*).

On peut vérifier ce résultat graphiquement.

Le mardi 17-12-2013

Guillaume Étienne en TS1 :
On fait + 3 pour se rapprocher de l'expression de $f(x)$.

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{f : x\mapsto \dfrac{1}{\cos x}}$

• **Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\cos x\neq 0$

si et seulement si $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Rappel : recherche d'un ensemble de définition (présentation/rédaction)

On écrit $f(x)$ existe si et seulement si …

si et seulement si …

ou

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

On n'écrit pas « *f* existe » (la fonction existe toujours !).

On a le droit d'utiliser le symbole d'équivalence.

Explication : Les points images des solutions de l'équation $\cos x=0$ sont B et B′ (en utilisant les notations traditionnelles du cercle trigonométrique) ; les réels associés sont donc $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}+\pi$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi$.

Tous ces nombres peuvent donc s'écrire sous la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Attention à la notation de l'ensemble avec accolades.

• **Calculons $f'(x)$.**

$$\forall x\in\mathscr{D}_f \qquad f'(x)=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

(On applique la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=\cos x$ et $u'(x)=-\sin x$).

On peut écrire $\forall x\in\mathscr{D}_f \quad f'(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x}$.

$\boxed{5}$ **Étude d'une fonction trigonométrique simple**

$\boldsymbol{f(x)=\cos 2x} \qquad \mathscr{D}_f=\mathbb{R}$

Étudions les variations de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle du cours)

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-2\sin 2x=-4\sin x\times\cos x$

1ère méthode :

On utilise la formule de duplication.

On utilise la formule de duplication du sinus : $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

On dresse ensuite le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[0\ ;\pi]$.

On utilise la forme $f'(x)=-4\sin x\times\cos x$ sans faire apparaître le – 4.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\sin x$ *	0	+		+	0
Signe de $\cos x$		+	0	–	
Signe de $f'(x)$	0	–	0	+	0
Variations de *f*	1	↘	– 1	↗	1

* On peut aussi mettre directement « Signe de $-4\sin x$ » dans le tableau de signes.

2[e] méthode : On travaille avec l'expression de la dérivée obtenue sans utiliser les formules de duplication.

La dérivée de f s'annule en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

On calcule les extremums de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \pi\right]$.

$$f\left(0\right)=\cos\left(2\times0\right)=\cos 0=1\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1\ ;\ f\left(\pi\right)=\cos\left(2\times\pi\right)=\cos 2\pi=1$$

Le maximum de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \pi\right]$ est égal à 1 ; le minimum de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \pi\right]$ est égal à – 1.

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

Représenter la courbe de la fonction f sur calculatrice graphique (en se plaçant en mode radian).

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto 4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

f est périodique de période $\mathrm{T}=4\pi$ (le résultat nous est fournit par une règle du cours ; mais j'aime mieux que l'on refasse la démonstration complète).

Solution détaillée :

Démontrons que *f* est périodique.

On pose $\mathrm{T}=4\pi$ (on applique la règle du cours qui donne la période pour les fonctions du type $x\mapsto \sin\left(ax+b\right)$: $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$).

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(x+\mathrm{T}\right)&=f\left(x+4\pi\right)\\&=4\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=4\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\&=4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=f\left(x\right)\end{aligned}$$

On en déduit que f est périodique de période $\mathrm{T}=4\pi$.

$\boxed{7}$ Étude d'une fonction trigonométrique

$f : x \mapsto 2\sin x+\sin 2x$

On commence par tracer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.
Il ne faut pas oublier de mettre la fonction en mode radian.
On choisit $\boxed{\text{zoom}}$ Ztrig ainsi que $Y\in\left[-3\,;3\right]$.

1°)

Démontrons que *f* est périodique de période 2π.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(x+2\pi\right)=2\sin\left(x+2\pi\right)+\sin\left(2x+4\pi\right)=2\sin x+\sin\left(2x\right)=f\left(x\right)$$

donc f est périodique de période 2π.

Nous ne sommes pas sûr que 2π soit la plus petite période mais nous allons l'admettre.
On peut en avoir la conviction avec le graphique ; le démontrer algébriquement n'est pas évident.

Étudions la parité de *f*.

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ donc il est centré en 0.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(-x\right)=2\sin\left(-x\right)+\sin\left(-2x\right)=-2\sin x-\sin 2x=-f\left(x\right)$$

On en déduit que f est impaire.

f est périodique de période 2π donc on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π soit]– π ; π].
De plus, comme f est impaire, on peut réduire alors le domaine d'étude à $\mathrm{I}=\left[0\,;\pi\right]$.

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x\mapsto 2\sin x$ et $x\mapsto \sin 2x$)

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f'\left(x\right)&=2\cos x+2\cos 2x\\&=2\cos x+4\cos^2 x-2\quad(\text{car } \cos 2x=2\cos^2 x-1)\\&=4\cos^2 x+2\cos x-2\\&=2\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)\end{aligned}$$

Les racines du polynôme $2X^2+X-1$ sont – 1 (racine évidente) et $\frac{1}{2}$ (obtenue par produit).

En utilisant la règle de factorisation d'un polynôme du second degré, on obtient :

$$\forall X\in\mathbb{R}\quad 2X^2+X-1=2\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+1\right)=\left(2X-1\right)\left(X+1\right).$$

Cela permet d'écrire que donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'\left(x\right)=2\left(2\cos x-1\right)\left(\cos x+1\right)$ (en posant $X=\cos x$).

Autre méthode :

On calcule d'une part la dérivée.
On développe d'autre part le résultat de la dérivée qui est fourni dans l'énoncé.
On constate que les deux expressions sont égales.

3°) a)

Étude du signe de $2\cos x - 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.

On utilise le cercle trigonométrique pour résoudre les inéquations.

$2\cos x - 1 > 0 \quad (1)$ $(1) \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$	$2\cos x - 1 < 0 \quad (2)$ $(2) \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x \leqslant \pi$	$2\cos x - 1 = 0 \quad (3)$ $(3) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

Étude du signe de $\cos x + 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.

$\cos x + 1 > 0 \quad (1)$ $(1) \Leftrightarrow \cos x > -1$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant x < \pi$	$\cos x + 1 < 0 \quad (2)$ $(2) \Leftrightarrow \cos x < -1$ Il n'y a pas de solutions dans I.	$\cos x + 1 = 0 \quad (3)$ $(3) \Leftrightarrow \cos x = -1$ $\Leftrightarrow x = \pi$

b) **Étudions les variations de *f*.**

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\cos x + 1$		$+$		$+$	0
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$

$f(\pi) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = 2$ (cette valeur n'est pas un extremum ; on la calculer pour pouvoir tracer plus précisément la courbe grâce à un point facile à placer)

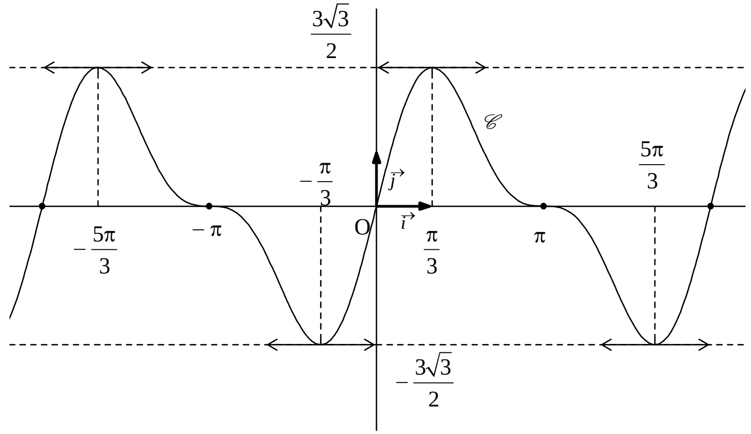
4°) **Tracé de la courbe représentative de *f***

Il est demandé de faire la courbe sur papier dans le cahier.

On commence :

- par placer les points correspondants aux extremums ;

- par tracer les tangentes horizontales.



On peut remarquer que la fonction *f* admet deux extremums gobaux sur $\mathbb{R}$: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ces deux extremums sont atteints une infinité de fois.

Le 6-1-2014 dans les ex. de fonctions sinus-cosinus

Louis Wiart

- La calculatrice n'est pas utile pour tracer la courbe.

- On a l'impression que la courbe est « aplatie » au niveau de l'axe des abscisses.
Cela est dû à la présence de tangentes horizontales.
La courbe « épouse » la « forme » de la tangente au voisinage du point.

- Pour la représentation graphique, bien penser à tracer les tangentes horizontales (sous forme de doubles flèches) ainsi que les bornes de l'intervalle de définition de la fonction.

8 $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ $\quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

1°)

• Déterminons la parité de *f*.

Le domaine de définition de *f* est $\mathbb{R}$ donc il est centré en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$$

On en déduit que *f* est impaire.

• Démontrons que *f* est périodique.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{2+\cos x} = f(x)$$

On en déduit que *f* est périodique de période 2π.

• Déduisons-en un intervalle d'étude de *f*.

f est périodique de période 2π donc on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π soit $]-\pi\,;\,\pi]$.
De plus, comme *f* est impaire, on peut réduire alors le domaine d'étude à $\mathrm{I} = [0\,;\,\pi]$.

2°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($u : x \mapsto \sin x$ et $v : x \mapsto 2+\cos x$)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\cos x \times (2+\cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

3°) **Étudions les variations de *f*.**

On résout deux inéquations et une équation $\boxed{\text{dans l'intervalle I}}$.

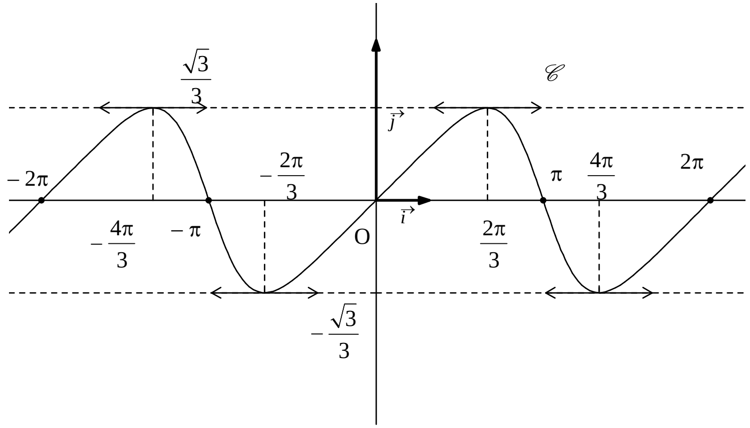
Pour résoudre les inéquations $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ et $\cos x < -\dfrac{1}{2}$ dans I, on utilise le cercle trigonométrique.

$2\cos x + 1 > 0 \quad (1)$	$2\cos x + 1 < 0 \quad (2)$	$2\cos x + 1 = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow \cos x > -\dfrac{1}{2}$	$(2) \Leftrightarrow \cos x < -\dfrac{1}{2}$	$(3) \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x < \dfrac{2\pi}{3}$	$\Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} < x \leqslant \pi$	$\Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

x	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
Signe de $2\cos x + 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2+\cos x)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



9 $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2\cos x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \neq \dfrac{1}{2}$

On résout l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Conclusion : $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \right\} \right)$

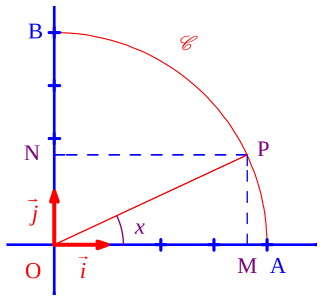
10 **Problème d'optimisation**

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point P appartient au quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A et B.
On construit le rectangle ONPM où M appartient à [OA] et N à [OB].

Reproduire la figure ci-dessous.



$\widehat{\mathrm{AOP}} = x$ rad

Solution détaillée :

On refait la figure en faisant figurer l'angle $\widehat{\mathrm{AOP}}$ et la mesure x.

1°) **Déterminons à quel intervalle I appartient x.**

x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Il n'y pas besoin de donner d'explication.

x est la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{AOP}}$ et P varie dans le quart de cercle $\mathscr{C}$ donc x varie dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2°) **Démontrons que l'aire de ONPM est $\mathscr{A}(x) = 8\sin 2x$.**

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \mathrm{OM}\times\mathrm{ON}\\ &= 4\cos x \times 4\sin x\\ &= 16\cos x\sin x\\ &= 8\sin 2x \quad \text{(en effet, on rappelle la formule de duplication du sinus : } \sin 2x = 2\sin x\cos x\text{)}\end{aligned}$$

3°) **Déduisons-en pour quelle valeur de x l'aire de ONPM est maximale.**

$x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $2x\in[0\,;\pi]$.

D'où $\sin 2x \in [0\,;1]$.

Par suite $0 \leqslant \mathscr{A}(x) \leqslant 8$.

$\mathscr{A}(x)$ est maximale lorsque $\sin(2x)=1$ c'est-à-dire $2x=\frac{\pi}{2}$ soit $x=\frac{\pi}{4}$.

L'aire de OMPN est maximale lorsque $x=\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire que P est le milieu de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$.

Commentaires :

1. Ce résultat est tout à fait « logique » (en effet la figure admet la 1ère bissectrice pour axe de symétrie). Il s'agit d'un problème d'optimisation dont la solution s'obtient par symétrie.
Les problèmes d'optimisation dont la solution s'obtient par symétrie sont évidemment les moins intéressants !
2. Cet exercice avait déjà été résolu dans le chapitre sur les dérivées en prenant pour variable $x = \mathrm{OM}$ (les calculs étaient beaucoup plus compliqués). La variable $x=\widehat{\mathrm{AOP}}$ permet des calculs beaucoup plus simples. C'est la variable « naturelle » du problème.
3. On pourrait utiliser la « règle du produit maximal » (cf. doc. approfondissement 1ère S).
4. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour avoir une idée du résultat.

11 **Étude d'une fonction trigonométrique**

Énoncé :

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

1°) Démontrer que f est périodique de période π.

2°) On se place sur l'intervalle $E=\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

a) Quel intervalle décrit $X = 2x+\frac{\pi}{3}$ quand x décrit E ?

b) Étudier le sens de variation de f sur E.
3°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
a) Tracer $\mathscr{C}$ sur E.

b) On admet que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{3}\,;0\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

En déduire le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ puis sur $[-\pi\,;2\pi]$.

Solution :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$

1°) **Démontrons que *f* est périodique de période π.**

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+\pi)=\sin\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)$$
$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=f(x)$$

On en déduit que *f* est périodique de période π.

2°) $\boldsymbol{E=\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\right]}$

a) **Quel intervalle décrit $X=2x+\frac{\pi}{3}$ quand *x* décrit *E* ?**

Méthode : On procède par encadrements successifs.

On a $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$.

En multipliant chaque membre par 2, on obtient $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

En additionnant $\frac{\pi}{3}$ à chaque membre, on obtient $0\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$.

D'où $0\leqslant X\leqslant\pi$.

b) **Étudions le sens de variation de *f* sur *E*.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

On ne transforme pas grâce aux formules d'addition. Cela n'aurait aucun intérêt.

On étudie le signe de $f'(x)$ pour $x\in E$.

Comme $2>0$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ce qui explique que dans la suite, on « laisse tomber » le 2.

On résout deux inéquations et une équation $\boxed{\text{dans l'intervalle } E}$ en utilisant le cercle trigonométrique.

D'après la question a), pour $x\in E$, on a : $2x+\frac{\pi}{3}\in[0\,;\pi]$.

Donc cela, revient à résoudre dans $[0\,;\pi]$, les inéquations $\cos X>0$ et $\cos X<0$ ainsi que l'équation $\cos X=0$.

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2x<\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x<\frac{\pi}{12}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<2x$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}<x$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ (3)

(3) $\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$

Explication pour $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

L'inégalité s'inverse quand on « passe » du cos à l'angle car la fonction cos est strictement décroissante sur [0 ; π].

Les seuls nombres de l'intervalle [0 ; π] dont le cosinus est strictement positif sont les réels de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{3}$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de *f*	0	↗	1	↘	0

On calcule les valeurs des extremums :

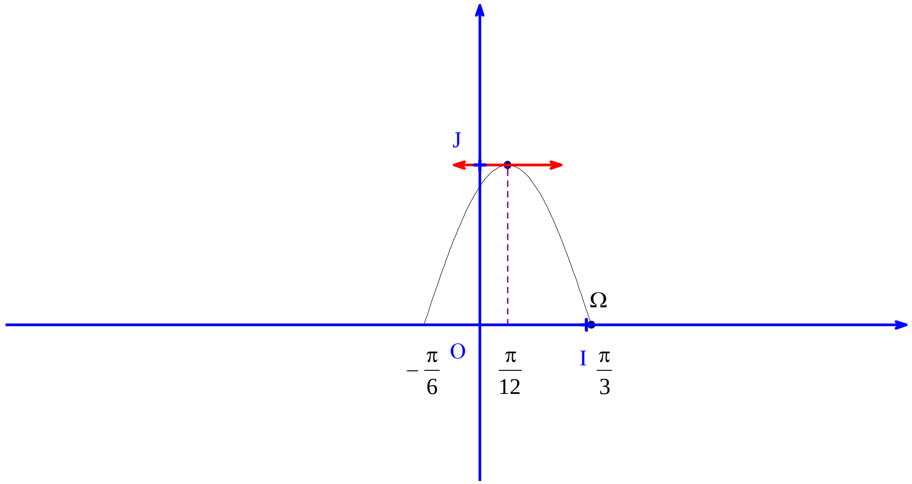
$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

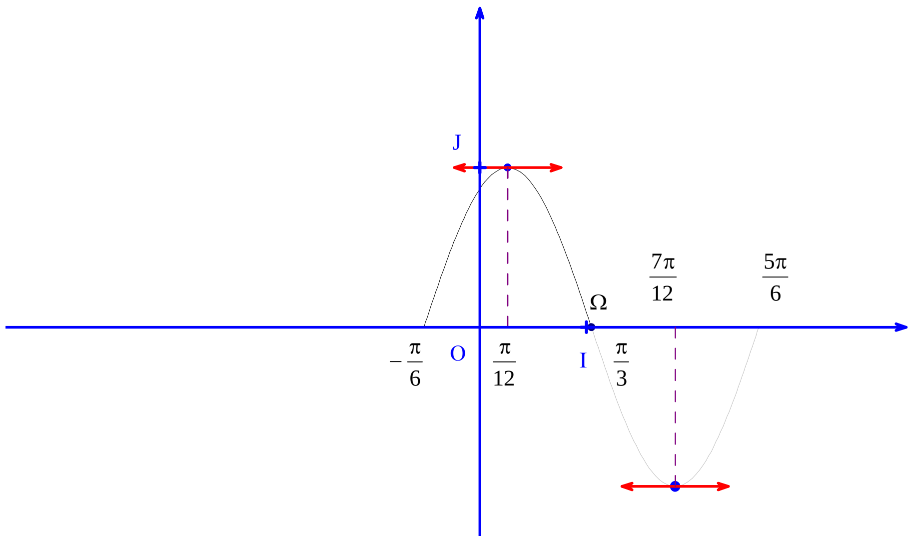
3°) **$\mathscr{C}$: courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal (O, I, J)**

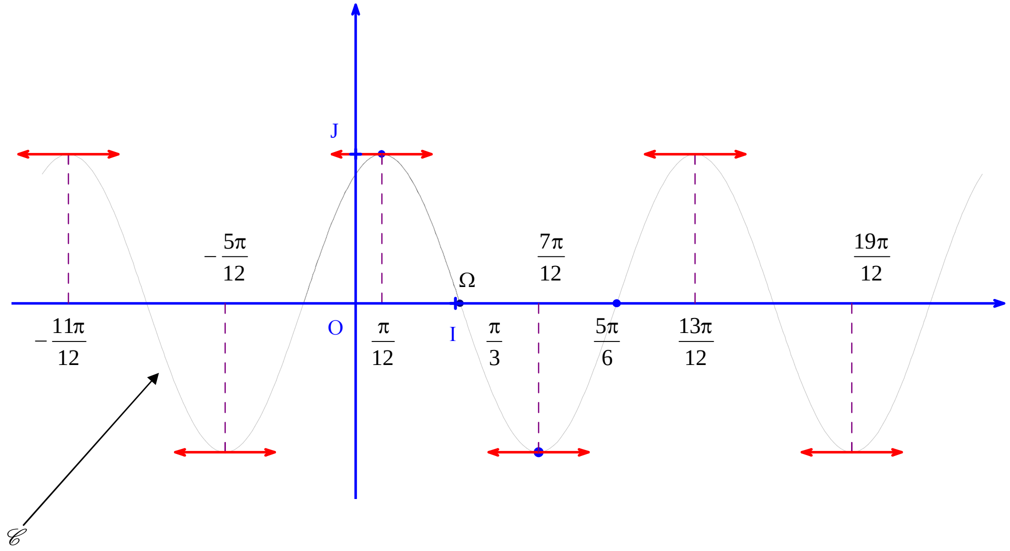
a) **Traçons $\mathscr{C}$ sur *E*.**



b) On admet que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{3}\,;0\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

Déduisons-en le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ puis sur $[-\pi\,;\pi]$.





Pour le tracé, on se référera au chapitre « tracé de courbes à la main » (positionnement des tangentes horizontales…).

$\mathscr{C}$ est une sinusoïde.

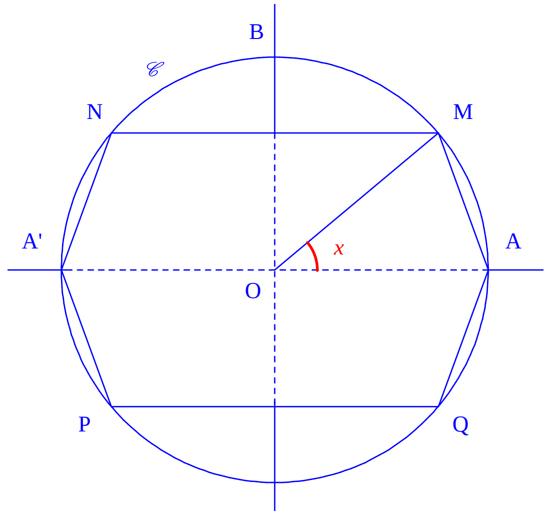
$\boxed{12}$ Problème d'optimisation

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On note A, B, A' les points de coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(0\,;1)$, $(-1\,;0)$.

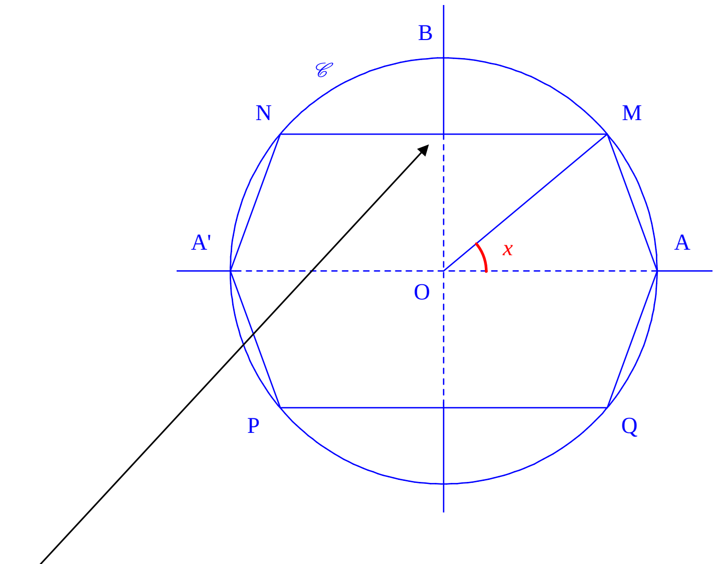
Pour tout réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on place le point M de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ tel que $\widehat{\mathrm{AOM}} = x$.

Les points N, P, Q sont les symétriques de M par rapport aux axes et à l'origine du repère.



Reproduire la figure.

Solution :



1°) **Démontrons que l'aire $S(x)$ de l'hexagone AMNA'PQ est égale à $S(x)=2\sin x(1+\cos x)$.**

Soit I le point d'intersection de (MN) et de l'axe des ordonnées.

1[ère] méthode :

$S(x)=4\mathscr{A}_{\text{OAMI}}$ (symétrie de la figure par rapport aux axes du repère)

$=4\times\dfrac{(\text{OA}+\text{IM})\times\text{OI}}{2}$ (OAMI est un trapèze rectangle ; voir le point I sur la figure)

$=2\times(\text{OA}+\text{IM})\times\text{OI}$

$=2(1+\cos x)\times\sin x$ (on utilise des relations trigonométriques dans des triangles rectangles)

$=2\sin x(1+\cos x)$

2[e] méthode :

$S(x)=2\mathscr{A}_{\text{A'AMN}}$ (symétrie de la figure par rapport à l'axe des abscisses)

$=\cancel{2}\times\dfrac{(\text{AA'}+\text{MN})\times\text{OI}}{\cancel{2}}$ (A'AMN est un trapèze, qui est de plus, isocèle ; voir le point I sur la figure)

$=(2+2\cos x)\times\sin x$

$=(2+2\cos x)\times\sin x$

$=2\sin x(1+\cos x)$

(Important : $\mathscr{A}_{\text{AOM}}=\dfrac{1}{2}\text{OA}\times\text{OM}\times\sin\widehat{\text{OAM}}$)

2°) **Démontrons que l'on a : $S'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.**

$\forall x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ $S'(x)=2\cos x(1+\cos x)+2\sin x\times(-\sin x)$

$=2\cos x+2\cos^2 x-2\sin^2 x$

$=2\cos x+2\left(2\cos^2 x-1\right)$

$=4\cos^2 x+2\cos x-2$ (polynôme du second degré en cos x)

$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

3°) a) Dressons le tableau de variation de S.

On étudie le signe de $2\cos x-1$ pour $x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On utilise le cercle trigonométrique pour résoudre les inéquations.

$2\cos x-1>0$ (1)	$2\cos x-1<0$ (2)	$2\cos x-1=0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow$ $\cos x>\dfrac{1}{2}$	(2) $\Leftrightarrow$ $\cos x<\dfrac{1}{2}$	(3) $\Leftrightarrow$ $\cos x=\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3}$	$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\pi}{3}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$	$\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{3}$

On étudie le signe de $\cos x+1$ pour $x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\cos x+1>0$ (1')	$\cos x+1<0$ (2')	$\cos x+1=0$ (3')
(1') $\Leftrightarrow$ $\cos x>-1$	(2') $\Leftrightarrow$ $\cos x<-1$	(3') $\Leftrightarrow$ $\cos x=-1$
$\Leftrightarrow$ $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$	Il n'y a pas de solutions dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.	Il n'y a pas de solutions dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\cos x + 1$		$+$		$+$	
Signe de $S'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de S	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	2

b) **Pour quelle valeur de x, l'hexagone a-t-il une aire maximale ? Que peut-on dire de l'hexagone dans ce cas ?**

L'hexagone a une aire maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$.

Dans ce cas, l'hexagone est régulier. En effet, tous ses angles au centre de sommet O ont alors pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

Il ne suffit pas de dire que tous ses côtés ont la même longueur. En effet, un hexagone convexe dont les côtés ont la même longueur n'est pas forcément régulier.

Il faut aussi s'assurer que :

- qu'il est inscrit dans un cercle

ou

- que tous les angles aux sommets sont aussi de même mesure (faire une figure pour s'en convaincre).
(« Les côtés ont la même longueur est une condition nécessaire non suffisante pour qu'un hexagone, plus généralement qu'un polygone convexe, soit régulier »).

Rappels sur les polygones réguliers :

Définition

Un polygone est régulier si tous ses côtés sont de la même longueur et si tous les angles formés par deux côtés consécutifs sont de même mesure.

Propriété

Si un polygone est régulier alors il est inscriptible dans un cercle.

Remarque :

La réciproque est fausse. Un triangle quelconque est toujours inscrit dans un cercle et pourtant il n'est pas forcément régulier.

Un polygone est régulier si et seulement si il est inscriptible dans un cercle et si tous ses angles au centre formés par 2 sommets consécutifs ont la même mesure.

Si un polygone est inscrit dans un cercle et si les côtés sont de même longueur, alors ce polygone est régulier.

$\boxed{13}$ Fonctions Arccossinus et Arcsinus

Rappel :

Arccosinus d'un réel

• **Définition**

$\forall y \in [-1;1] \quad \exists !\ x \in [0\,;\pi]\ /\ \cos x = y$

Ce réel x est appelé **« Arccosinus de y »**. On note **x = Arccos y**.

• **Exemples :**

$\text{Arccos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\text{Arccos}\,0 = \frac{\pi}{2}$; $\text{Arccos}\,1 = 0$

• **Calculatrice TI-83 Premium CE :** touche $\boxed{\text{trig}}$ choisir $\cos^{-1}$ (mode radian)

Arcsinus d'un réel

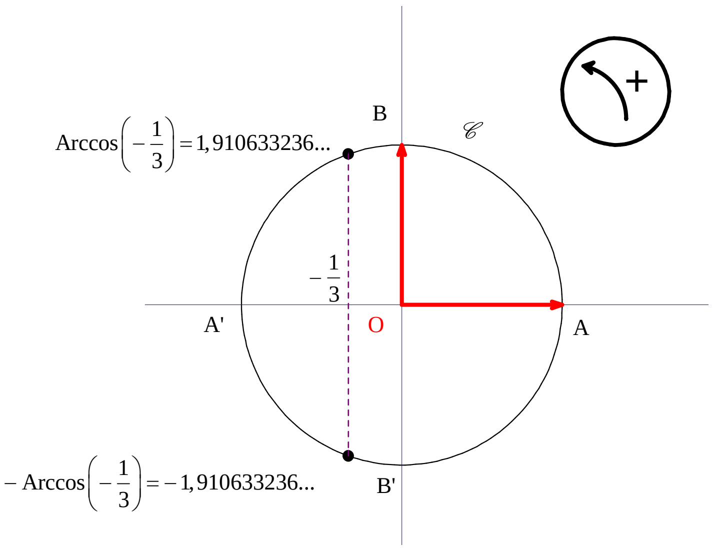
$\forall y \in [-1;1] \quad \exists !\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]/\ \sin x = y$

Ce réel x est appelé **« Arcsinus de y »**. On note **x = Arcsin y**.

• **Calculatrice TI-83 Premium CE :** touche $\boxed{\text{trig}}$ choisir $\sin^{-1}$ (mode radian)

• **Exemple :** $\text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

• (1) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{3} \\ x \in [-\pi\,;\pi] \end{cases}$



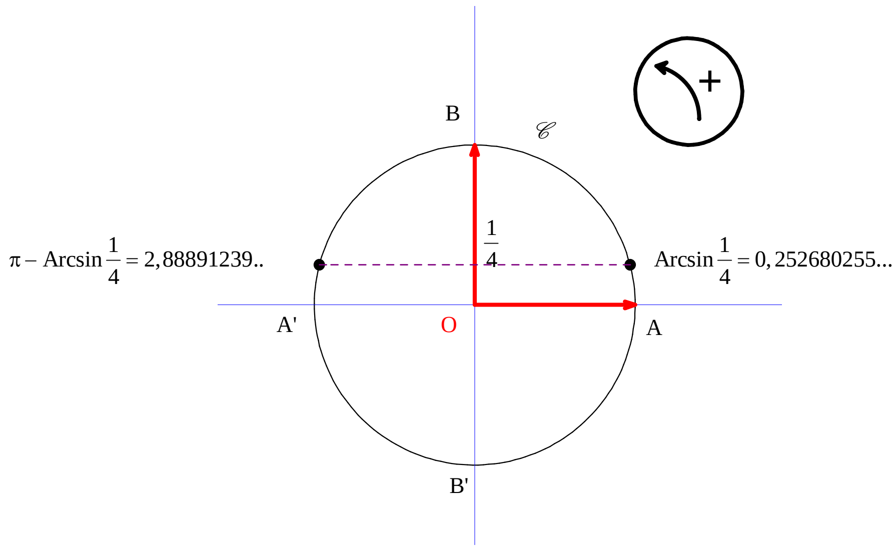
• On doit mettre la calculatrice en mode radian.

• Il est intéressant de joindre les points au centre O du cercle pour faire apparaître des mesures d'angles orientés en radians.

Les solutions de (1) sont $\text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ et $-\text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

Les valeurs arrondies au millième de ces solutions sont 1,911 et – 1,911.

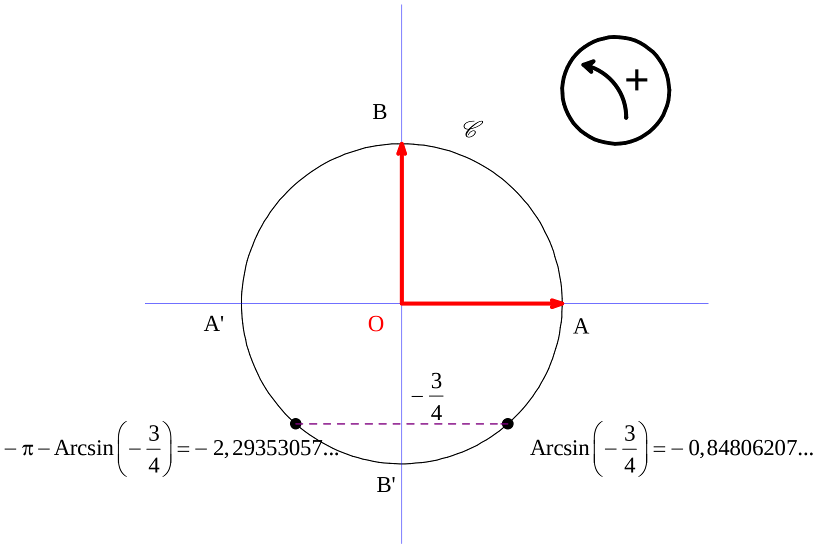
• (2) $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{4} \\ x \in [-\pi\,;\pi] \end{cases}$



Les solutions de (2) sont $\text{Arcsin}\dfrac{1}{4}$ et $\pi - \text{Arcsin}\dfrac{1}{4}$.

Les valeurs arrondies au millième de ces solutions sont 0,252 et 2,889.

• (3) $\begin{cases} \sin x = -\dfrac{3}{4} \\ x \in [-\pi\,;\pi] \end{cases}$

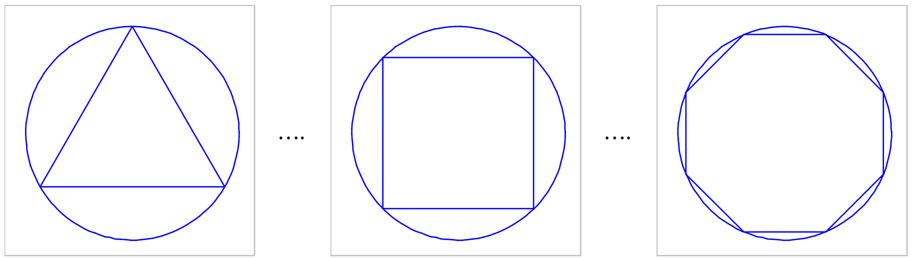


Les solutions de (2) sont $\text{Arcsin}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ et $-\pi-\text{Arcsin}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$.

Les valeurs arrondies au millième de ces solutions sont – 0,848 et – 2,294.

Réflexion découlant de la caractérisation du polygone régulier par Louis Wiart le 9-1-2015

● Plus un polygone régulier a de côtés, plus il va se rapprocher du cercle sans jamais toutefois se confondre avec le cercle.
Cela est utilisé par exemple dans la méthode d'Archimède pour déterminer des approximations de π.



● De même, on peut appliquer ceci dans l'espace (en inscrivant les polyèdres dans une sphère*, on va progressivement obtenir des solides de plus en plus proches de la boule sans jamais obtenir de boule).
C'est pourquoi on peut considérer qu'on ne peut pas faire de patron de boule.

Louis Wiart avait employé le terme de « boule ».
Ceci est faux ; il n'existe que 5 types de polyèdres réguliers convexes.

http://www.panamaths.net/
Polygone : figure géométrique fermée ayant un nombre fini de côtés.
Exemples : triangles, quadrilatères, pentagones (5 côtés), hexagones (6 côtés), octogones (8 côtés), décagones (10 côtés), dodécagones (12 côtés).
Cercle circonscrit à un polygone : cercle qui passe par tous les sommets du polygone, le polygone est alors inscrit dans le cercle (! tous les polygones n'ont pas un cercle circonscrit).
Cercle inscrit dans un polygone : cercle tangent à tous les côtés du polygone, le polygone est alors exinscrit au cercle (! tous les polygones n'ont pas un cercle inscrit).
Polygone régulier : polygone dont tous les côtés ont même longueur.

http://www.amicollege.com/maths/balade/polygo_1.php?id=0lzeembqwwj
présentation en 3 pages qui est tout à fait bien