TS1

Contrôle du jeudi 13 décembre 2012 (50 minutes)

- On prendra soin d'encadrer tous les résultats des questions en rouge à la règle.
- Ne rien écrire, ne rien surligner sur l'énoncé.
- Ne pas rendre l'énoncé dans la copie.

I. (2 points)

Quelle(s) condition(s)* permettent d'affirmer que la suite (u_n) converge vers 0 ?

a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 100$, on a : $u_n \in \left[-10^{-3} ; 10^{-3}\right]$.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

c. Tout intervalle ouvert contenant 0, contient tous les termes de la suite, à partir d'un certain indice.

d. Il existe un intervalle ouvert contenant 0 qui contient tous les termes de la suite.

e. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

f. Pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

g. La suite (u_n) est croissante et majorée par 0.

h. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0.

* Le mot est à prendre au sens de « condition suffisante ».

Écrire sur la copie uniquement les lettres correspondant aux réponses choisies ; ne pas justifier.

II. (5 points)

On considère un concessionnaire de la marque M qui s'adresse à une clientèle souhaitant renouveler sa voiture.
Il connaît l'état du marché ; il sait que la part de la clientèle qui possède la marque M est de 30 %.
Il connaît aussi le comportement de sa clientèle ; il sait que 80 % des possesseurs de la marque M achèteront M tandis que 30 % des non possesseurs de la marque M l'achèteront.
Quelle est la probabilité qu'il vende une voiture de la marque M à un client quelconque qui veut renouveler sa voiture ? Faire une rédaction complète. Donner le résultat sous forme décimale.

III. (13 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un pingouin est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un pingouin choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un pingouin choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Le pingouin est obligé de faire quelque chose (il ne peut pas ne rien faire).
Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'événement « le pingouin utilise le toboggan lors de son n-ième passage » et on note u_n la probabilité de l'événement T_n.

1°) Préciser la valeur de u_1 (sans calcul, donner le résultat sans explication).
2°) Calculer u_2 (donner uniquement les grandes étapes de calcul).
3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
4°) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{25 \times (0,1)^n + 2}{9}$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
5°) Le gardien du zoo choisit au hasard 10 pingouins, dans un groupe suffisamment grand pour pouvoir assimiler ce choix à une succession de 10 tirages indépendants, avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'événement T_2 est réalisé au cours de ces 10 expériences (pour chaque pingouin).
a) Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
b) Calculer à l'aide de la calculatrice la probabilité pour que X soit au moins égale à 2 (valeur arrondie au millième).
c) Calculer E(X). Interpréter.
d) Calculer V(X).

Bonus :

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question (m est un entier naturel supérieur ou égal à 2). Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.
On note p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée.
S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées.
Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ? Réponse en fonction de m et p.

Indication :
On pourra considérer les événements A : « L'étudiant donne la bonne réponse » et B : « L'étudiant connaît la bonne réponse ».

Corrigé du contrôle du 13-12-2012

I. Les conditions permettant d'affirmer que la suite (u_n) converge vers 0 sont : c et f.

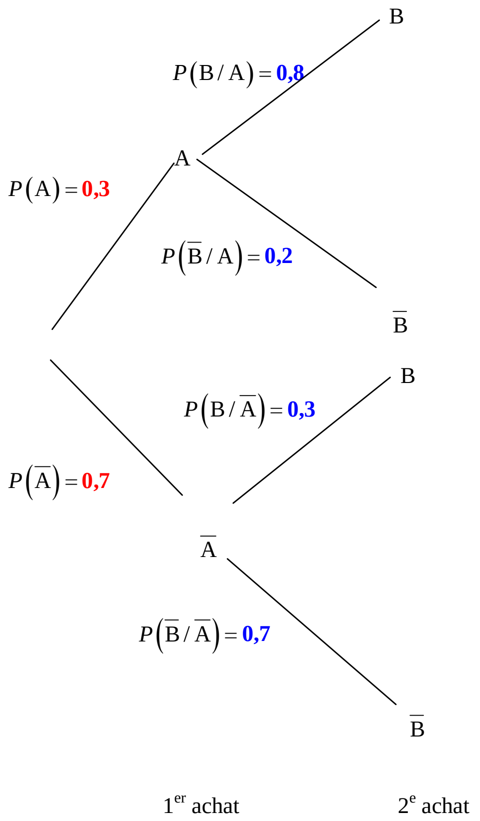
II.

On définit les événements suivants

A : « Le client possède un véhicule de la marque M » ;

B : « Le client achète un véhicule de la marque M ».

On dresse un arbre de probabilités.



A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\
&= P(B/A) \times P(A) + P(B/\overline{A}) \times P(\overline{A}) \\
&= 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}7 \\
&= 0{,}24 + 0{,}21 \\
&= 0{,}45
\end{aligned}$$

La probabilité que le concessionnaire vende une voiture de la marque M à un client quelconque est **0,45**.

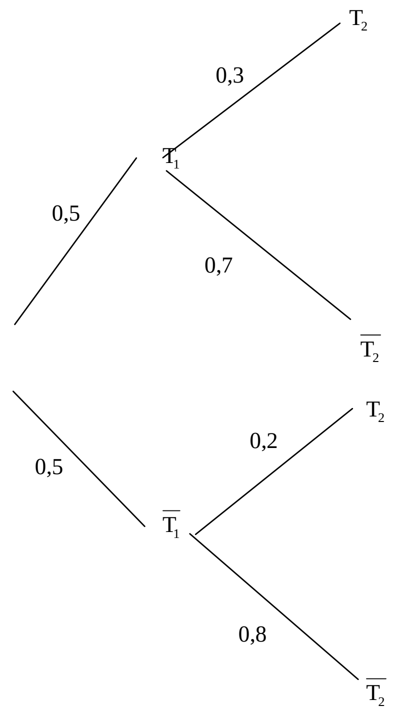
III.

1°) **Précisons la valeur de u_1.**

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

La probabilité de l'événement T_1 est donc $u_1 = 0{,}5$.

2°) **Calculons u_2.**



T_1 et $\overline{\mathrm{T}_1}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

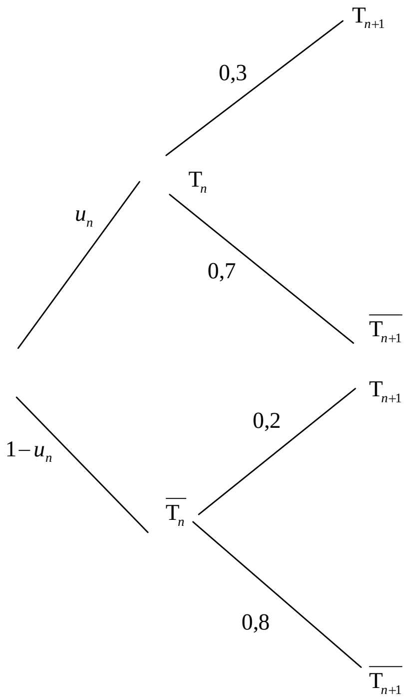
$$u_2 = P(\mathrm{T}_2/\mathrm{T}_1)\times P(\mathrm{T}_1) + P(\mathrm{T}_2/\overline{\mathrm{T}_1})\times P(\overline{\mathrm{T}_1})$$

$$= 0,3\times 0,5 + 0,2\times 0,5$$

$$= 0,25$$

Donc $\boldsymbol{u_2 = 0,25}$.

3°) **Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.**



T_n et $\overline{\mathrm{T}_n}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(\mathrm{T}_{n+1}) \\ &= P(\mathrm{T}_{n+1}/\mathrm{T}_n)\times P(\mathrm{T}_n) + P(\mathrm{T}_{n+1}/\overline{\mathrm{T}_n})\times P(\overline{\mathrm{T}_n}) \\ &= 0,3\times u_n + 0,2\times(1-u_n) \\ &= 0,1u_n + 0,2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2}$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{25\times(0,1)^n + 2}{9}$ (admis)

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,1)^n = 0$ car $-1 < 0,1 < 1$.

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{9}}$.

5°)

a) **Déterminons la loi suivie par X.**

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.

b) **Calculons la probabilité pour que X soit au moins égale à 2.**

On cherche $P(\mathrm{X} \geqslant 2)$.
On raisonne par événement contraire pour pouvoir faire le calcul à la calculatrice.

$$P(\mathrm{X}\geqslant 2) = 1 - P(\mathrm{X} < 2)$$

$$= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 1)$$

On utilise la fonction de répartition de la loi binomiale sur la calculatrice.

Sur une calculatrice TI, on entre : 1 – binomFrép(10,0.25,1).

On obtient l'affichage : $\boxed{0,755974769}$.

Nous obtenons donc $\boldsymbol{P(\mathrm{X}\geqslant 2) \approx 0,756}$ (valeur arrondie au millième).

c) **Calculons E(X) et interprétons le résultat.**

On sait que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi une loi binomiale de paramètres *n* et *p* est égale à *np*.

Ici $n = 10$ et $p = 0,25$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 10\times 0,25$$

Donc $\boldsymbol{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2,5}$.

Ce résultat signifie que si l'on répète un très grand nombre de fois le choix d'un échantillon aléatoire de 10 pingouins, la moyenne du nombre de pingouins qui se serviront du toboggan au second tour se rapprochera de 2,5.

d) **Calculons V(X).**

On sait que la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi une loi binomiale de paramètres *n* et *p* est égale à *npq* avec $q = 1 - p$.

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 10 \times 0,25 \times 0,75$$

Donc $\mathbf{V(X) = 1,875}$.

Exercice bonus :

A : « L'étudiant donne la bonne réponse »

B : « L'étudiant connaît la bonne réponse »

On cherche $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) &= \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} \\ &= \frac{P(\mathrm{A/B}) \times P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \\ &= \frac{P(\mathrm{A/B}) \times P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \times P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}}) \times P(\overline{\mathrm{B}})} \end{aligned}$$

(les événements B et $\overline{\mathrm{B}}$ constituent un système complet d'événements donc on peut utiliser la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} &= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m} \times (1 - p)} \\ &= \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} \\ &= \frac{mp}{mp + 1 - p} \end{aligned}$$

La probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse lorsqu'il donne une réponse est $\mathbf{\frac{mp}{mp+1-p}}$.