TS

Le produit scalaire dans l'espace

Plan du chapitre :

Origine du produit scalaire :

Le concept de produit scalaire date du milieu du XIX[e] siècle. Il a été défini pour les besoins de la physique (travail d'une force).
Ce n'est qu'après qu'on a pris conscience de l'intérêt qu'il pouvait avoir en géométrie.

Notations :

On note E l'ensemble des points de l'espace ;
$\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

$\vec{E}$ ne désigne pas un vecteur. On remarquera d'ailleurs que le E écrit ici est en italique.
Dans le chapitre, tous les noms des points sont écrits en majuscules droites.

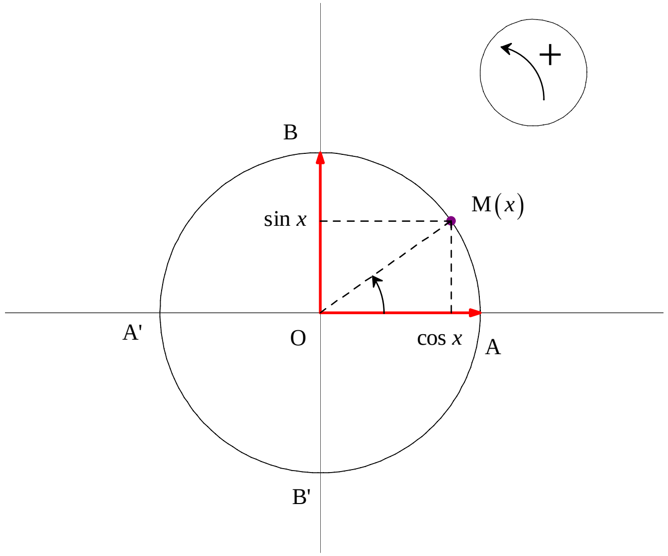
Une unité de longueur est fixée.

Rappels

① Cosinus d'un réel

Définition :

Le cosinus d'un réel quelconque x est l'abscisse du point M, image de x, sur le cercle trigonométrique.



Le cosinus d'un réel se lit donc grâce au cercle trigonométrique sur l'axe des abscisses.

Valeurs remarquables du cosinus (à connaître par cœur) :

On retrouve aisément les valeurs grâce au cercle trigonométrique.

Il y a un moyen mnémotechnique pour retenir ces valeurs (ainsi que celles du sinus).

Angles en degré

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180
$\cos x°$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Angles en radian

y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos y$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

On notera que $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

② Deux résultats à connaître (démonstrations à l'aide du théorème de Pythagore)

- Longueur de la diagonale d'un carré : côté $\times\sqrt{2}$

- Longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral : $\frac{\text{côté}\times\sqrt{3}}{2}$

③ Norme d'un vecteur

Définition :

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque de $\vec{E}$ est sa longueur, une unité de longueur étant fixée. On la note $\left\|\vec{u}\right\|$.

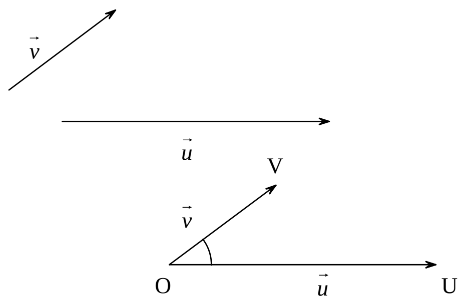
De manière évidente, si A et B sont deux points quelconques de E, on a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
Autrement dit, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance entre les points A et B.

La norme du vecteur nul est égale à 0. On peut donc écrire $\left\|\vec{0}\right\|=0$.

④ Angle géométrique formé par deux vecteurs quelconques non nuls de l'espace

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques non nuls de $\vec{E}$.
Soit O un point quelconque de E.
On note U et V les points définis par $\overrightarrow{OU}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$.
On appelle angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle $\widehat{UOV}$.



On peut démontrer que la mesure de cet angle dans une unité ne dépend pas du point O choisi.

Notation :

L'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ ou $\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)$.

Il n'y a pas d'angle orienté dans l'espace.

⑤ Trouver un angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente à l'aide de la calculatrice.

La calculatrice peut être mise en mode degré ou radian selon l'unité considérée.

Calculatrice Numworks :

$\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{cos}}$ valeur affichage arccos( ) .

(collège : $\cos^{-1}$)

$\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{sin}}$ valeur affichage arcsin( ) .

(collège : $\sin^{-1}$)

$\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ valeur affichage arctan( ) .

(collège : $\tan^{-1}$)

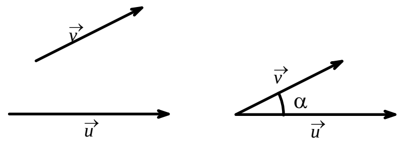
Autre moyen maladroit :
Utiliser le solveur de résolution des équations de la calculatrice.
On doit préciser les bornes (0 et 180 si l'on est en degré, à et π si l'on est en radian).

I. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de $\overrightarrow{E}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$



La notation $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Il s'agit bien de l'angle géométrique des vecteurs. Il n'y a pas d'angle orienté dans l'espace.

On notera que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel.

L'unité sous-entendue est l'unité de longueur au carré. On ne l'écrit pas.

2°) Écriture du produit scalaire de deux vecteurs non nuls écrits avec des représentants de même origine

A, B, C sont trois points quelconques de E tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}}$

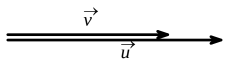
On a une formule prête à l'emploi à utiliser directement en exercice sous cette forme en l'adaptant avec le nom des points.
Il s'agit de l'application de la formule de définition avec les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

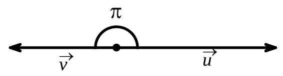
Dans ce cas,
- $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{AB}$ et $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \mathrm{AC}$
- l'angle $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$ (sommet A, origine commune des deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

3°) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de même sens}\\[2ex] -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de sens contraire}\end{cases}$$





On a des formules prêtes à l'emploi, à utiliser directement en exercice.

Dans le premier cas, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour mesure 0 rad (angle géométrique nul) et $\cos 0=1$.

Dans le deuxième cas, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour mesure π rad (angle géométrique plat) et $\cos\pi=-1$.

4°) Signe d'un produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques **non nuls** de $\vec{E}$.

- $\vec{u}\bullet\vec{v}>0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **aigu**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}<0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **obtus**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **droit**

Le produit scalaire en physique est utilisé pour définir le **travail d'une force** constante sur un trajet rectiligne ; on parle de **travail moteur** ou de **travail résistant** suivant son signe.

5°) Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{E}^2 \quad \left|\vec{u}\bullet\vec{v}\right|\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

La valeur absolue du produit scalaire de deux vecteurs est inférieure ou égale au produit des normes.

Cette inégalité provient de la propriété : $\forall x\in\mathbb{R} \quad |\cos x|\leqslant 1$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

On pourra utiliser cette inégalité pour vérifier les calculs de produits scalaires : la valeur absolue d'un produit scalaire est toujours inférieure ou égale au produit des normes.

II. Carré scalaire d'un vecteur

1°) Définition et propriété

$$\vec{u}^2=\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

2°) Écriture de la formule du carré scalaire d'un vecteur défini par deux points

$$\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=AB^2$$

III. Vecteurs orthogonaux

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$) pour exprimer que
- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est droit, c'est-à-dire $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;
- soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.

On notera que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs de l'espace.

2°) Propriété fondamentale

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$.

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=0$$

3°) Caractérisation de l'orthogonalité de deux droites dans l'espace

Soit D et D' deux droites de l'espace.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de D et D'.
Les droites D et D' sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$$D\perp D'\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$

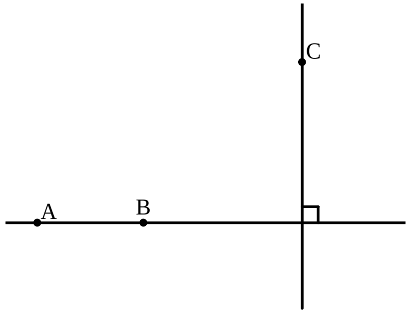
$$D\perp D'\Leftrightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=0$$

4°) Lieux d'orthogonalité de référence dans l'espace

Le mot lieu est un terme mathématique ancien employé en géométrie.

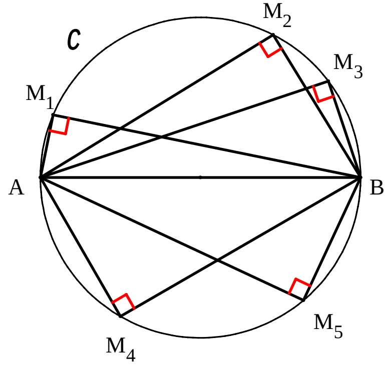
Dans le plan :

• Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$:
droite perpendiculaire à (AB) passant par C.



Placer des points M…

• Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$:
cercle de diamètre [AB].



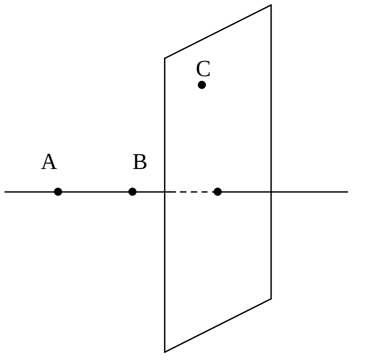
On se réfère à la propriété sur le triangle rectangle inscrit dans un cercle.

Le cercle de diamètre [AB] est le lieu des points du plan d'où l'on voit les points A et B sous un angle droit.

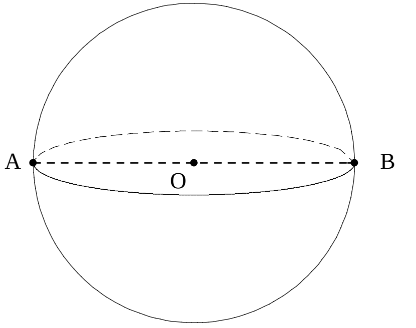
Dans l'espace :

On adapte les résultats précédents.

• Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$:
plan orthogonal à (AB) passant par C.



• Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$:
sphère de diamètre [AB].

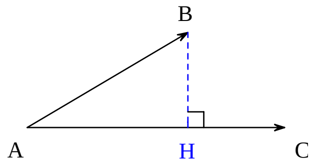


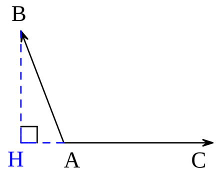
IV. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques de E tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



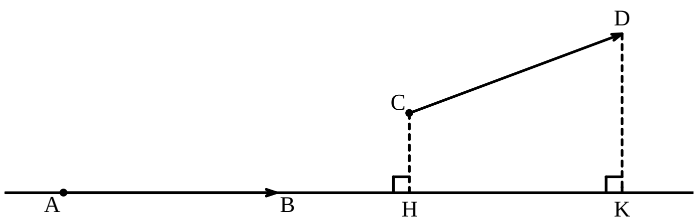


2°) Démonstration

Voir cours de 1ère.

3°) Généralisation (projection « complète »)

A, B, C, D sont quatre points de E tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{HK}}$.



4°) Mises en garde

- Dans la situation où l'on a trois points tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$ (figures du 1°)), pour le calcul de $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, on ne peut pas projeter sur une autre droite que la droite (AB) ou la droite (AC).

- On ne peut projeter que l'un des deux vecteurs.

- On verra plus loin une propriété de projection orthogonale sur un plan.

V. Propriétés du produit scalaire

1°) Propriétés fondamentales (symétrie et bilinéarité du produit scalaire)

$\mathrm{P}_1 : \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (P_1 : **symétrie du produit scalaire**)

$\mathrm{P}_2 : \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \bullet (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \bullet \vec{v})$ (P_2 et P_3 : **bilinéarité du produit scalaire**)

$\mathrm{P}_3 : \forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3 \quad \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

2°) Démonstrations

P_1 : évidente
P_2 et P_3 : voir cours de 1ère

3°) Conséquences sur les développements scalaires doubles

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}') \in \vec{E}^4 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u}' + \vec{v}') = \vec{u} \bullet \vec{u}' + \vec{u} \bullet \vec{v}' + \vec{v} \bullet \vec{u}' + \vec{v} \bullet \vec{v}'$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda \vec{u}) \bullet (\lambda' \vec{v}) = \lambda \lambda' (\vec{u} \bullet \vec{v})$$

Exemple important :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad (-\vec{u}) \bullet (-\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$$

Cas particulier très utile en pratique : $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

4°) Identités remarquables scalaires

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \vec{v}^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \vec{v}^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Les formules peuvent s'écrire avec des normes :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Conséquence :

Par addition et soustraction membre à membre des deux premières identités remarquables, on peut établir deux autres identités importantes :

- $\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{E}^2 \quad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=2\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)$ ou $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Cette relation s'appelle **identité du parallélogramme**.

- $\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{E}^2 \quad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2-\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=4\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$

5°) Exercice

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$ tels que $\left\|\vec{u}\right\|=1$, $\left\|\vec{v}\right\|=4$ et $\vec{u}\bullet\vec{v}=-2$.

Calculer $\left(3\vec{u}-\vec{v}\right)^2$; en déduire $\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|$.

Calculer $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{v}-\vec{u}\right)$.

$$\left(3\vec{u}-\vec{v}\right)^2=9\vec{u}^2-2\left[\left(3\vec{u}\right)\bullet\vec{v}\right]+\vec{v}^2$$

$$=9\vec{u}^2-2\times3\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\vec{v}^2$$

$$=9\left\|\vec{u}\right\|^2-6\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$=9\times1^2-6\times(-2)+4^2$$

$$=9+12+16$$

$$=37$$

On peut aussi appliquer directement la deuxième des deux égalités de développement suivantes où a et b sont des réels :

$\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)^2=a^2\vec{u}^2+2ab\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+b^2\vec{v}^2$; $\left(a\vec{u}-b\vec{v}\right)^2=a^2\vec{u}^2-2ab\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+b^2\vec{v}^2$.

On sait que $\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left(3\vec{u}-\vec{v}\right)^2$ (le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de la norme) donc

$\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=37$.

Or $\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|\geqslant0$.

Par conséquent, $\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{37}$.

Attention, $\left\|3\vec{u}-\vec{v}\right\|$ n'est pas égal à $3\left\|\vec{u}\right\|-\left\|\vec{v}\right\|$.

Avec ce raisonnement, on trouverait – 1, résultat absurde puisque la norme d'un vecteur est positive ou nulle.

$\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{v}-\vec{u}\right)=-\left\|\vec{u}\right\|^2-\vec{u}\bullet\vec{v}+2\left\|\vec{v}\right\|^2$ (après développement et réduction)

$$=-1+2+2\times4^2$$

$$=33$$

6°) Bilan des méthodes de calcul d'un produit scalaire

P.S. de 2 vecteurs

Expression trigonométrique avec le cosinus
(cas particuliers

- vecteurs colinéaires + ou – le produit des normes
- vecteurs orthogonaux : 0)

Projeté orthogonal

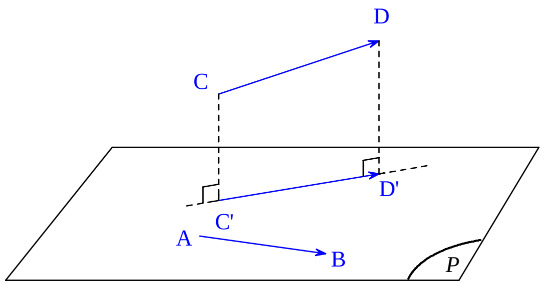
Décomposition de vecteurs

Calcul dans un repère orthonormé
$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

7°) Propriété de projection orthogonale sur un plan

Énoncé :

Soit A, B, C et D quatre points de E et un plan P contenant A et B.
On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur P.
On a alors $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{C'D'}$.



Démonstration :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}=0$.

Par suite, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

On peut projeter sur un plan mais pas sur n'importe quel plan : sur un plan qui contient les deux points de l'un des deux vecteurs.

8°) Exemples importants d'utilisation des propriétés

• Simplifier le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$ où A et B sont deux points quelconques.

① $1^{\text{ère}}$ méthode :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\quad\text{(bilinéarité du produit scalaire)}$$
$$=-\overrightarrow{AB}^2$$

② 2^{e} méthode : lorsque $A\neq B$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires de sens contraires.
On applique la propriété concernant le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$ ($\vec{u}\cdot\vec{v}=-$ produit des normes).

• Simplifier le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ où A, B, C sont trois points quelconques.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

VI. Relations métriques

Relations métriques :
Il s'agit d'égalités avec des angles dans des figures géométriques (dans ce paragraphe, pour des triangles).

1°) Théorème de Pythagore généralisé (formule d'Al Kashi)

a)

Soit A, B, C trois points quelconque de *E*.
On a : $\mathbf{BC^2=AB^2+AC^2-2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}$.

AB désigne la distance de A à B (ou la longueur du segment [AB]).

On a $AB=BA$ (mais $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$).

AB^2 désigne le carré de la distance AB.

Idem pour BC^2 et AC^2.

Idée pour faire la démonstration :

$$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$$

On utilise ensuite une identité remarquable scalaire.

b) Conséquence

On suppose que $B\neq A$, $C\neq A$, $(AB)\perp(AC)$.
On a alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. La relation donne $BC^2=AB^2+AC^2$.
On retrouve donc le théorème de Pythagore.
Le théorème de Pythagore est un cas particulier d'Al Kashi (ou découle directement d'Al Kashi).

Il y a même équivalence : $(AB)\perp(AC)\Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$.

c)

Soit A, B, C trois points tels que $B\neq A$ et $C\neq A$.
On a : $\mathbf{BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{A}}$.

On peut écrire des formules analogues pour CA^2 et AB^2 en effectuant une permutation circulaire des lettres A, B, C (A devient B, B devient C, C devient A).

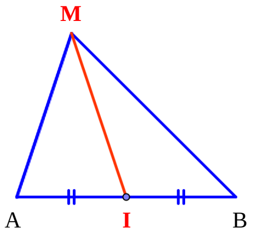
Pour retenir facilement la formule, on remarquera que $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.

La formule du côté permet :
- de calculer les mesures des angles d'un triangle connaissant les longueurs des 3 côtés ;
- de calculer la longueur d'un côté d'un triangle dont on connaît les longueurs des 2 autres côtés et la mesure de l'angle qu'ils forment.

2°) Formule de la médiane

A et B sont deux points quelconques de *E*.
I est le milieu de [AB].

$\forall \mathrm{M} \in E \quad \mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}}$



Idée pour faire la démonstration :

$$\begin{aligned}\forall \mathrm{M} \in E \quad \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2 \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Lorsque M, A, B sont deux à deux distincts, la droite (MI) est la médiane issue de I dans le triangle MAB.

Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.

Le mot « médiane » désigne normalement une droite. Cependant, parfois, on l'emploie pour désigner un segment. Il en est de même du mot hauteur.

Comme le nom l'indique, la formule de la médiane permet de calculer la longueur des médianes d'un triangle connaissant les longueurs des 3 côtés.

3°) Autres formules dites aussi parfois « formules de la médiane »

A et B sont deux points quelconques de *E*.

$\forall \mathrm{M} \in E \quad \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IM}}$

$\forall \mathrm{M} \in E \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \dfrac{\mathrm{AB}^2}{4}$

Démonstration :

2 idées

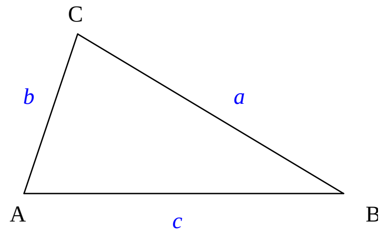
$\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2$

- $(\mathrm{MA} + \mathrm{MB}) \times (\mathrm{MA} - \mathrm{MB})$ (il s'agit d'une voie sans issue)
- $\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2$ (on passe aux carrés scalaires)
  $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)$

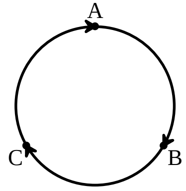
$$\begin{aligned}\forall \mathrm{M} \in E \quad \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \quad \text{(on reconnaît une identité remarquable scalaire)} \\ &= \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} \\ &= \left(-2\overrightarrow{\mathrm{IM}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= 2\left(\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\end{aligned}$$

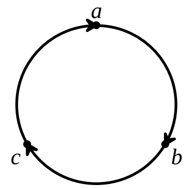
4°) Aire d'un triangle – Formule des sinus

ABC est un triangle quelconque.
On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.
L'aire *S* du triangle ABC est donnée par : $\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2} ca \sin \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{\mathrm{C}}}$.



On observera le principe de **permutation circulaire** des lettres A, B, C et des lettres *a*, *b*, *c*.



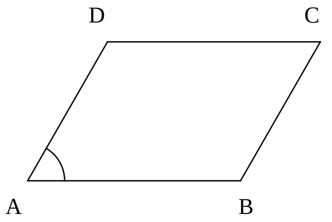


On a les égalités suivantes, appelée « formule des sinus » dans un triangle :

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin \widehat{\mathrm{A}}} = \frac{b}{\sin \widehat{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\sin \widehat{\mathrm{C}}} = \frac{abc}{2S}}$$

5°) Aire d'un parallélogramme

L'aire S d'un parallélogramme ABCD est donnée par la formule : $S = \text{AB} \times \text{AD} \times \sin \widehat{\text{BAD}}$.



On fait facilement le lien avec l'aire d'un triangle quelconque.
L'aire de ABCD est égale au double de l'aire du triangle ABD.

VII. Lignes et surfaces de niveau

1°) Définition

f est une application de E dans $\mathbb{R}$.
k est un réel.
On appelle **surface de niveau *k*** de f l'ensemble $S_k = \{\text{M} \in E \,/\, f(\text{M}) = k\}$.

Le mot « application » peut ici être remplacé par le mot « fonction ».

On parle de **ligne de niveau** lorsque f est une application du plan dans $\mathbb{R}$.

Rappel : E désigne l'ensemble des points de l'espace.

2°) Exemple

A et B sont deux points quelconques de E.
I est le milieu de [AB].

$$E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\text{M} \mapsto \text{MA}^2 + \text{MB}^2$$

Déterminer la **surface de niveau *k*** $(k \in \mathbb{R})$ de f, c'est-à-dire l'ensemble $S_k = \{\text{M} \in E \,/\, f(\text{M}) = k\}$.
Compte tenu de la définition de f, $S_k = \{\text{M} \in E \,/\, \text{MA}^2 + \text{MB}^2 = k\}$.

Méthode : On réduit la quantité $\text{MA}^2 + \text{MB}^2$ puis on raisonne par chaîne d'équivalences.

D'après la formule de la médiane, $\forall \text{M} \in E \quad \text{MA}^2 + \text{MB}^2 = 2\text{MI}^2 + \dfrac{\text{AB}^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\text{M} \in S_k &\Leftrightarrow \text{MA}^2 + \text{MB}^2 = k \\
&\Leftrightarrow 2\text{MI}^2 + \frac{\text{AB}^2}{2} = k \\
&\Leftrightarrow \text{MI}^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{\text{AB}^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

On ne connaît pas le signe de $k - \dfrac{\text{AB}^2}{2}$; il faut faire une **discussion**.

1er cas : $\boxed{k > \dfrac{\text{AB}^2}{2}}$

Dans ce cas, $k - \dfrac{\text{AB}^2}{2} > 0$ donc $\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{\text{AB}^2}{2}\right) > 0$.

$$\text{M} \in S_k \Leftrightarrow \text{MI} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{\text{AB}^2}{2}\right)}$$

S_k est la sphère $\left|\begin{array}{l} \text{de centre I} \\ \text{de rayon } R = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{\text{AB}^2}{2}\right)} \end{array}\right.$.

2e cas : $\boxed{k = \dfrac{\text{AB}^2}{2}}$

$$\begin{aligned}
\text{M} \in S_k &\Leftrightarrow \text{MI}^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{MI} = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{M} = \text{I}
\end{aligned}$$

$S_k = \{\text{I}\}$

S_k est le singleton constitué du point I.

On appelle singleton un ensemble constitué d'un seul élément.

3^e cas : $\boxed{k < \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}}$

Dans ce cas, $k - \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2} < 0$ donc $\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}\right) < 0$.

$$\mathrm{M} \in S_k \Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{MI}^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(k - \frac{\mathrm{AB}^2}{2}\right)}_{<0}$$

impossible

$S_k = \varnothing$

3°) Propriété

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$.
Soit O un point de *E*.
L'ensemble des points M de *E* tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ est le plan passant par O et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal.

La définition d'un vecteur normal à un plan est donnée dans le paragraphe suivant.

VIII. Vecteur normal à un plan

1°) Rappel [définition d'un vecteur normal à une droite dans le plan]

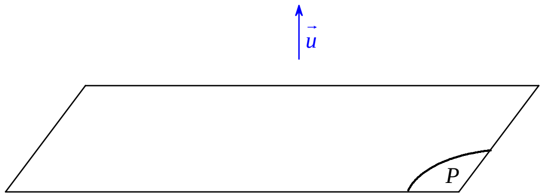
Soit *D* une droite du plan.

On appelle **vecteur normal** à *D* tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à *D*, c'est-à-dire tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de *D*.

2°) Définition [vecteur normal à un plan dans l'espace]

Soit *P* un plan de l'espace.

On appelle **vecteur normal** à *P* tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à *P*.



En mathématiques, on parle de « normale » à une courbe en un point (droite perpendiculaire à la tangente en ce point).

En physique, on parle de réaction normale / réaction tangentielle ; accélération normale / accélération tangentielle (repère de Frenet).

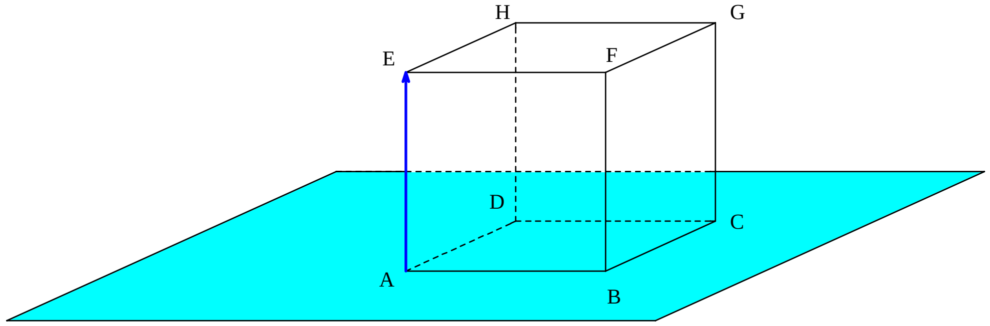
On peut écrire la petite propriété ci-dessous.

Soit A et B deux points distincts de *E* et *P* un plan.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un **vecteur normal** à *P* si et seulement si (AB) $\perp$ *P*.

3°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.



Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

[Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ est aussi un vecteur normal au plan (ABC).]

On a la petite propriété évidente suivante :

Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à un plan *P*, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à *P*.

Dans l'exemple du cube ABCDEFGH, pour le plan (ABC), on peut donner les vecteurs suivants comme vecteurs normaux :
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$
$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ (qui sont égaux aux précédents)
etc.

On prendra garde de ne pas confondre direction et sens.

4°) Propriété

Soit P un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires de P.
$\vec{u}$ est un vecteur normal à P si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

La condition « $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ » est équivalente à $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

La démonstration provient de la propriété : « Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (c'est-à-dire non parallèles de ce plan) ».
On peut dégager une méthode pratique pour démontrer qu'un vecteur est un vecteur normal à un plan défini par trois points non alignés.

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Pour démontrer que $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), il suffit de vérifier que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$.

5°) Mise en garde

La notion de vecteur normal dans l'espace n'est valable que pour un plan. Un plan P de l'espace admet une infinité de vecteurs non nuls de direction orthogonale à P et ils ont tous la même direction (donc sont tous colinéaires).
On ne parle pas de vecteur normal pour une droite de l'espace. En effet, une droite D de l'espace admet une infinité de vecteurs non nuls de direction orthogonale à celle de D. et ils n'ont pas tous la même direction.

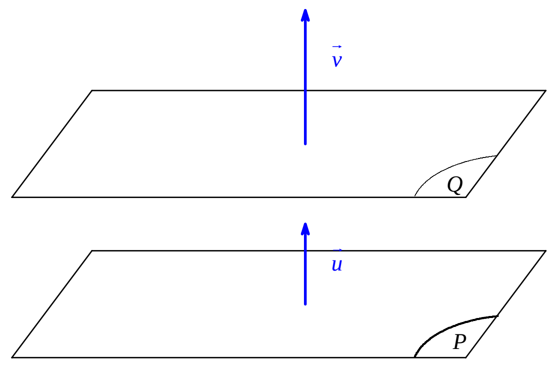
6°) Théorème

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace E tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

7°) Propriétés de parallélisme, d'incidence et d'orthogonalité à l'aide de vecteurs normaux

Soit P et Q deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$P \,//\, Q \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

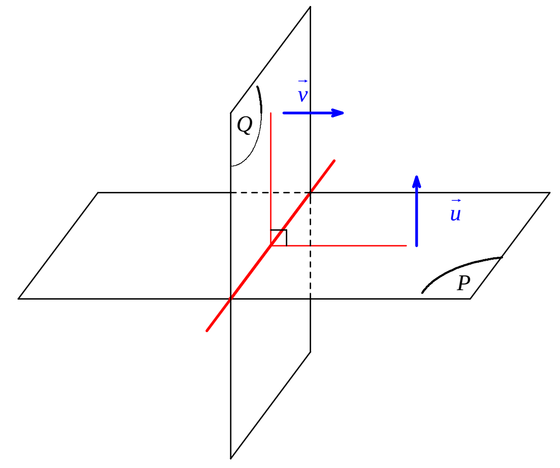


Soit P et Q deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

P et Q sont sécants $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Soit P et Q deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$P \perp Q \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

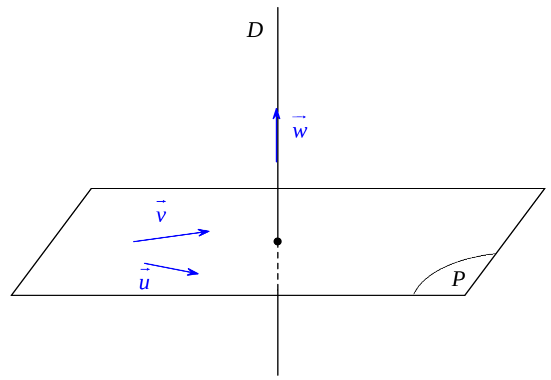


Soit D une droite de l'espace.
Soit P un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de P.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de D.

$D \perp P \Leftrightarrow \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

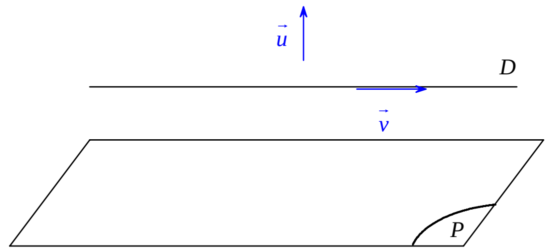
$$D \perp P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \bullet \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \end{cases}$$



Soit D une droite de l'espace.
Soit P un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à P.
Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de D.

D // $P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



Avec les mêmes notations, D est sécante à $P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Soit D une droite de l'espace.
Soit P un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à P.
Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de D.

$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.