TS Limites et comparaisons

Plan du chapitre :

Les théorèmes donnés dans ce chapitre sont analogues à ceux concernant les limites de suites.

I. Le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est + ∞.
f, g, h sont trois fonctions définies sur I telles que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Ce théorème est admis sans démonstration.

Ce théorème reste vrai si x tend vers – ∞ ou x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

On peut remplacer sin x par le sinus de ce que l'on veut (on peut écrire $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\sin(x^2)$, $\sin(x^3)$, $\sin(\mathrm{e}^x)$, $\sin(3x^2 + x^3 + \mathrm{e}^x)$ etc.
On peut éventuellement prendre un cosinus.

$D_f = \mathbb{R}^*$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Attention : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.

On procède par inégalités successives.
On commence par encadrer sin x par – 1 et 1 (attention, les deux inégalités sont des inégalités larges et non strictes).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

$: x \; (x > 0)$

On est obligé de supposer $x > 0$ pour la division des membres par x.

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

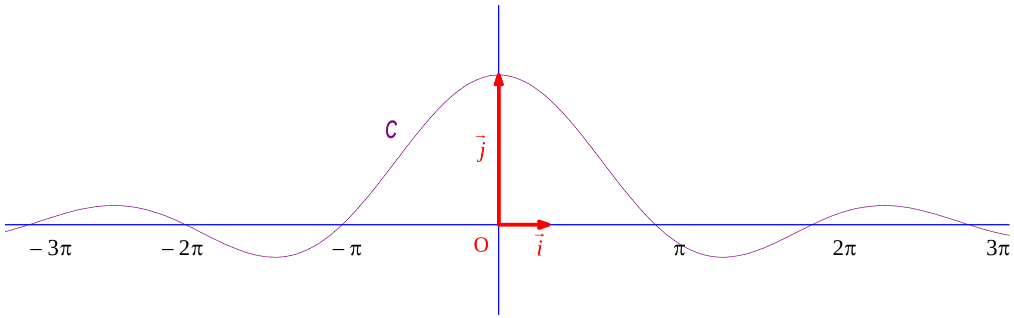
On peut vérifier cette limite avec dcode, rubrique « Limites de fonctions ».

Il est intéressant de regarder la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.
On doit mettre la calculatrice en mode radian (très important).

Calculatrice Numworks : Paramètres Unité d'angle sélectionner Radians

On observe bien que la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞ (et en – ∞).

On peut d'ailleurs noter qu'elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.



La limite que nous venons d'obtenir $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (limite en $+\infty$) ne doit pas être confondue avec la limite de référence étudiée dans le chapitre sur l'étude des fonctions cosinus et sinus : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (limite en 0).
Cette dernière limite se « voit » également graphiquement sur la courbe de la fonction *f* (observation au voisinage du point $A(0\,;1)$: la fonction *f* peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ n'est cependant pas une limite de référence et doit être démontrée à chaque fois.

II. Extension du théorème des gendarmes (« un seul gendarme »)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est $+\infty$.
***f* et *g* sont deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant g(x)$.**

- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.**
- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.**

Ce théorème est admis sans démonstration.

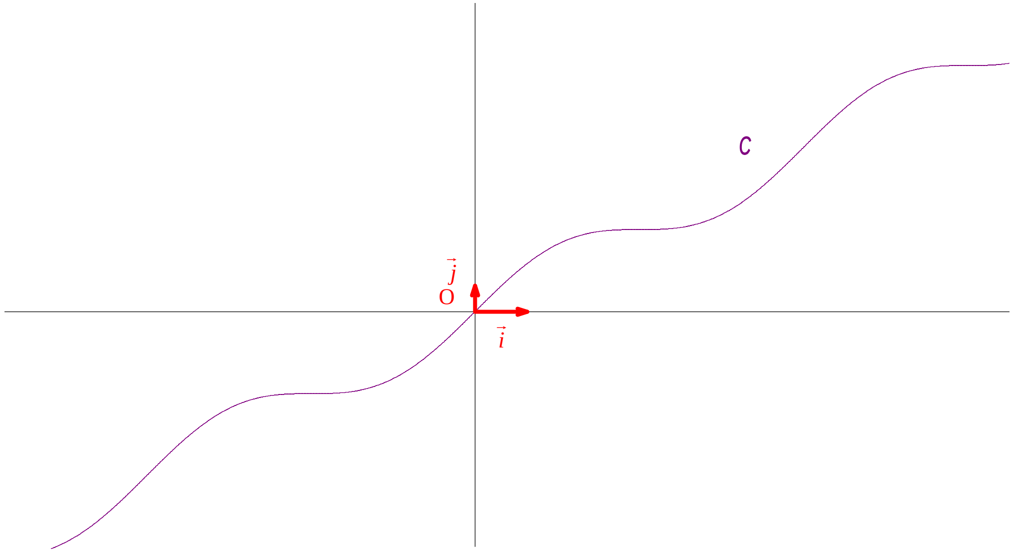
Ce théorème reste vrai si *x* tend vers $-\infty$ ou *x* tend vers *a* avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x + \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

Graphique



On doit mettre la calculatrice en mode radian (très important).
La courbe représentative de *f* est comprise entre les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = x + 1$ (ces deux droites sont parallèles ; elles définissent une bande du plan).
Ces deux droites ne sont pas des asymptotes.

- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \geqslant -1$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \geqslant x - 1$ (minoration de la fonction).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant x - 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$
Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

.

On peut vérifier cette limite avec dcode, rubrique « Limites de fonctions ».

• Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \leqslant 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \leqslant x + 1$ (majoration de la fonction)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant x + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

III. Point-méthode : utilisation des théorèmes de comparaison

1°) Quel théorème utiliser

• 2 limites finies égales : on utilise le théorème des gendarmes (**I**).

• 1 limite infinie : on utilise l'extension du théorème des gendarmes (**II**).

2°) Attention sur les inégalités

Quand on multiplie par un réel négatif, on change de sens.

3°) Penser au théorème des gendarmes ou à son extension quand on a des fonctions cosinus ou sinus.

	Hypothèses	Conclusion	Commentaires
Théorème des gendarmes	$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \ell$ $h(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$	$g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} \ell$	$\ell \in \mathbb{R}$ x tend vers la même « chose » dans les 3 limites
Extension du théorème des gendarmes	$f(x) \leqslant g(x)$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} +\infty$ $f(x) \leqslant g(x)$ $g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} -\infty$	$g(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} +\infty$ $f(x) \xrightarrow[x \to \ldots]{} -\infty$	x tend vers la même « chose » dans les 2 limites

Autre vision :

$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ avec ℓ réel (limite finie)
$h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$ avec ℓ' réel (limite infinie)

1$^{\text{er}}$ cas : $\ell = \ell'$
Dans ce cas, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

2$^{\text{e}}$ cas : $\ell \neq \ell'$
Dans ce cas, on ne peut rien dire.

IV. Application : croissances comparées de l'exponentielle et du logarithme népérien

① $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

On sait que $\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u > u$ (provient de l'inégalité de convexité : $\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u \geqslant u + 1$).

On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2} \quad (1)$.

Dans la suite, on se limitera à $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En élevant au carré les deux membres de l'inégalité (1), on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ (conservation du sens de l'inégalité car les deux membres sont positifs) soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^x > \dfrac{x^2}{4} \quad (2)$.

En divisant les deux membres de l'inégalité (2) par x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{4} \quad (3)$.

On a $\dfrac{x}{4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Compte tenu de (3), on peut affirmer que $\boxed{\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$.

Il s'agit d'une limite de référence à savoir par cœur et à utiliser directement.

② $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

On sait que $\forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln u < u$ (provient de l'inégalité de convexité : $\forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln u \leqslant u+1$).

On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$.

La propriété sur le logarithme népérien d'une racine carrée permet d'écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x < 2\sqrt{x} \quad (1)$.

En divisant les deux membres de l'inégalité (1) par x (x étant strictement positif), on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \quad (3)$.

Or $\dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}} \quad (3)$.

Dans la suite, on se limite à $x \geqslant 1$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[\quad \ln x \geqslant 0$ donc $\forall x \in [1\,;+\infty[\quad \dfrac{\ln x}{x} \geqslant 0$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[\quad 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto 0$ et $v : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in [1\,;+\infty[\quad u(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant v(x) \\ u(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \\ v(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$\boxed{\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$.

Il s'agit d'une limite de référence à savoir par cœur et à utiliser directement.