TS

Nombres complexes (3)
(Argument, écriture trigonométrique, écriture exponentielle)

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, on s'appuie au début sur la représentation géométrique des nombres complexes.

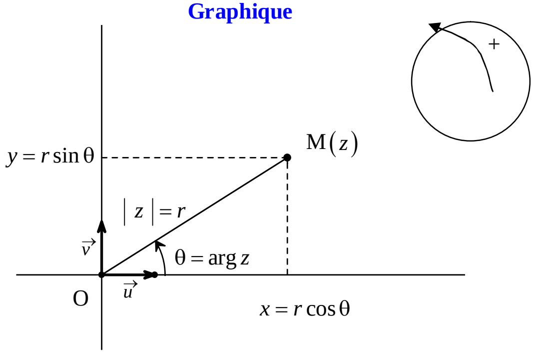
I. Argument d'un nombre complexe non nul

1°) Définition

z est un nombre complexe non nul.

M est son image dans le plan complexe (qui est donc orienté) muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note $(r\ ;\ \theta)$ un couple de coordonnées polaires de M.
θ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.
On dit que θ est **un argument** du nombre complexe z.

Graphique



On se place dans le plan complexe orienté.

On s'intéresse à l'angle orienté formé dans cet ordre par la demi-droite de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et la demi-droite $[\mathrm{OM})$ (angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).

On observera la manière dont cet angle est représenté graphiquement avec une petite flèche à l'une des extrémités.

2°) Écriture

Si θ est un argument de z, on écrira :

$$\arg z = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg z = \theta \quad [2\pi]$$

modulo 2π

II. Forme trigonométrique

1°) Démonstration

$z \in \mathbb{C}^*$
$\mathrm{M}(z)$

Repérage cartésien	Repérage polaire
$(x\,;y)$: coordonnées cartésiennes $z = x + \mathrm{i}y$	$(r\,;\theta)$: coordonnées polaires $\lvert z \rvert = r$ et $\arg z = \theta$

Lien entre les deux :

$$r = \mathrm{OM} = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On sait que : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Application :

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y \\ &= r\cos\theta + \mathrm{i}\,r\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \end{aligned}$$

2°) Définition

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Cette forme est **une forme trigonométrique** du nombre complexe z.
(θ n'étant pas unique, cette forme n'est pas unique contrairement à la forme algébrique).

On verra l'intérêt dans les calculs.

3°) Exercice

Comment trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe donné sous forme algébrique ?

- **$z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$**

Calcul du module r

$$r = \lvert z \rvert = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Calcul d'un argument θ

On sait que : $\begin{cases} \mathrm{Re}\,z = r\cos\theta \\ \mathrm{Im}\,z = r\sin\theta \end{cases}$.

On cherche θ tel que $\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ \sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases}$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On peut s'aider du cercle trigonométrique à l'aide des valeurs du cosinus $\boxed{\text{et}}$ du sinus (les deux).

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Un argument de z est $\dfrac{\pi}{3}$.

- **$z = 1 + \mathrm{i}$**

$$\lvert z \rvert = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (on force l'intégration du module ; on force la factorisation)

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Un argument de z est $\dfrac{\pi}{4}$.

• $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$$
$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Un argument de z est $-\frac{\pi}{6}$.

N.B. : On peut aussi écrire $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ mais ce n'est pas une écriture algébrique.

• $z = 2\mathrm{i}$

$$z = 2(0 + 1\,\mathrm{i})$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Un argument de z est $\frac{\pi}{2}$.

On peut le retrouver graphiquement.

4°) Remarques

• 0 n'a pas d'argument.

• Une écriture de la forme $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique car $-2 < 0$.
Une écriture de la forme $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est une forme trigonométrique seulement lorsque $r > 0$.

• Avec les notations du 2°), quand le module de z, est égal à 1, on n'a pas besoin d'écrire la forme trigonométrique $z = 1(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$; on écrit directement la forme trigonométrique $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Quand le module est égal à 1, on écrit directement la forme algébrique $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

• On a toujours des valeurs particulières pour obtenir des valeurs de cosinus et sinus connues.

• On peut vérifier tous les résultats avec la calculatrice

Calculatrice Numworks :
La calculatrice doit préalablement avoir été mise en mode radian.
Exemple :
On rentre le nombre $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
On clique sur les trois petits points.
On a une représentation graphique du nombre.

On lit la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument.
Il y a un petit défaut : l'angle est représenté comme un angle géométrique et non comme un angle orienté de vecteurs.

Un autre moyen consiste à aller dans la rubrique « Nombres complexes » de la boîte à outils.
On peut trouver un argument avec la commande arg(z).

Calculatrice TI-83 Premium CE :

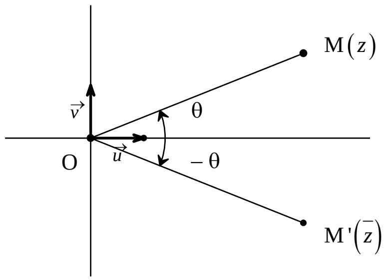
$\boxed{\text{math}}$ menu CMPLX

Exemple : $1+\mathrm{i}$ CMPLX 7 : Polaire
On obtient une forme qui sera vue plus loin : la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$.

III. Propriétés immédiates des arguments

1°) Propriété 1

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \arg \bar{z} = -\arg z \quad (2\pi)}$$

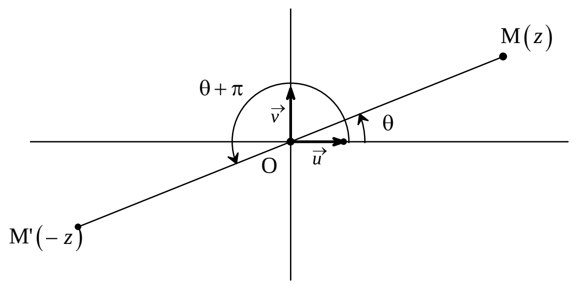


Les points $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

On a donc $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ (2π).

2°) Propriété 2

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \arg(-z) = \arg z + \pi \quad (2\pi)}$$



Les points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport à O.

On a donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \pi \quad (2\pi)$.

3°) Propriété 3

• $M(z)$ appartient à l'axe des réels $\Leftrightarrow \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ M \neq O \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = 0 \quad (\pi) \end{cases}$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z \neq 0 \text{ et } \arg z = 0 \quad (\pi) \end{cases}$$

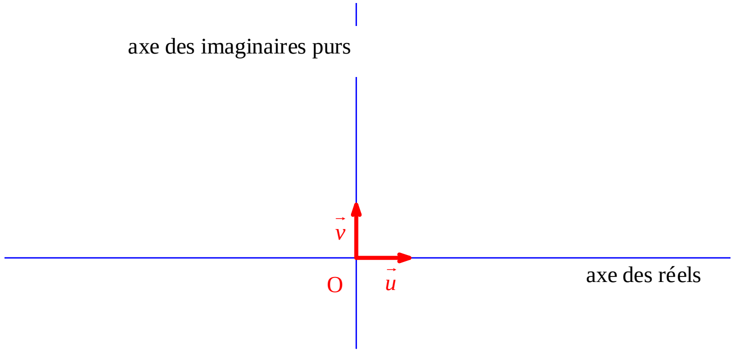
• $M(z)$ appartient à l'axe des imaginaires purs $\Leftrightarrow \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ M \neq O \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \end{cases}$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z \neq 0 \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \end{cases}$$

Retenir :

$z \in \mathbb{C}^*$

$$\boxed{\begin{array}{lll} z \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & \arg z = 0 \quad (\pi) \\ z \in i\mathbb{R} & \Leftrightarrow & \arg z = \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \end{array}}$$



IV. Calculs avec la forme trigonométrique

Les formules de ce paragraphe ne sont pas vraiment à apprendre.
On va les réécrire avec la forme exponentielle.

1°) Calcul d'un produit

$z \in \mathbb{C}^* \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left((r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$

$z' \in \mathbb{C}^* \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \quad \left((r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$

$$zz' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$zz' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$zz' = rr'\left[\left(\underbrace{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}_{\substack{\text{formule d'addition du cosinus} \\ \cos(\theta+\theta')}}\right) + i\left(\underbrace{\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta}_{\substack{\text{formule d'addition du sinus} \\ \sin(\theta+\theta')}}\right)\right]$$

$$zz' = \underbrace{rr'}_{>0}\left[\cos\left(\underbrace{\theta+\theta'}_{\Psi}\right) + i\sin\left(\underbrace{\theta+\theta'}_{\Psi}\right)\right]$$

$$\boxed{zz' = \underbrace{rr'}\left[\cos\left(\underbrace{\theta+\theta'}\right) + i\sin\left(\underbrace{\theta+\theta'}\right)\right]}$$

somme des arguments

produit des
modules

2°) Calcul d'un inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}}$$

identité remarquable

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times (\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]}$$

inverse **opposé de l'argument**
du module

3°) Calcul d'un quotient

Même calcul

$$\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left[\cos\left(\theta-\theta'\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta-\theta'\right)\right]$$

4°) Calcul d'une puissance $\left(n\in\mathbb{Z}\right)$

On peut généraliser la formule du produit vue au paragraphe 1°) pour n réels quelconques (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) θ_1, θ_2, …, θ_n.

Si on pose $Z=\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right)\times\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right)\times\ldots\times\left(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n\right)$, on peut écrire :

$Z=\cos\left(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n\right)$.

On obtient ensuite aisément toujours pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)^n=\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)\times\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)\ldots\times\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)=\cos\left(n\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\theta\right)$

On peut ensuite vérifier que cette formule reste valable pour n négatif.

$$z^n=r^n\left[\cos\left(n\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\theta\right)\right]$$

V. Propriétés des arguments pour les opérations algébriques (déduites du IV)

Mêmes hypothèses qu'au **IV.**

1°) Propriété 1

$$\arg\left(zz'\right)=\arg z+\arg z'\quad(2\pi)$$

2°) Propriété 2

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg z\quad(2\pi)$$

3°) Propriété 3

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'\quad(2\pi)$$

4°) Propriété 4

$$\arg\left(z^n\right)=n\arg z\quad(2\pi)$$

VI. Écriture exponentielle complexe

1°) Notation

On pose par convention : $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2°) Exemples

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut utiliser la calculatrice et taper $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0=1$ (on retrouve cette formule géométriquement)

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=1$ (idem)

$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathbf{i}$ (idem)

$\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\mathbf{i}$

« La plus belle formule des mathématiques » : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$ que l'on peut aussi écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$.

En effet : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1+1\times 0=-1$

1 : unité
–1 : – des négatifs
e : nombre de Néper
i : nombres complexes

On peut utiliser la calculatrice et taper $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

3°) Transposition des calculs du IV en écriture exponentielle

On a vu : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.

$$\mathbf{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$$

$$\mathbf{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}}$$

$$\mathbf{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

$$\mathbf{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$$

$$\mathbf{\left| e^{i\theta} \right| = 1}$$

Démonstration des deux dernières propriétés :

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\theta}} &= \overline{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= e^{-i\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left| e^{i\theta} \right| &= \left| \cos\theta + i\sin\theta \right| \\ &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

On pourra retenir l'égalité $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

On peut également retenir l'écriture générale (générique) d'un nombre complexe de module 1 sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

4°) Équivalence fondamentale

$$\boxed{\mathbf{e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k\pi}}$$

VII. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

1°) Définition

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a alors : $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ (2\pi)$.

2°) Cas d'égalité de deux formes exponentielles

$(r, r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$; $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

3°) Exemple

$z = -2 + 2i$ écriture algébrique

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{(\underline{une} forme trigonométrique)}$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{(\underline{une} forme exponentielle)}$$

On peut vérifier tous les résultats avec la calculatrice ($\boxed{\text{math}}$ menu CMPLX puis polaire).

4°) Applications aux calculs : produits, quotients, puissances

r et r' sont deux réels strictement positifs.
θ et θ' sont des réels quelconques.

$$\mathbf{re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$$

$$\mathbf{\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

$$\mathbf{\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}}$$

$$\mathbf{\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}}$$

VIII. Applications à la trigonométrie

1°) Formule de Moivre (1667-1754)

θ est un réel quelconque.
n est un entier naturel quelconque.

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \xrightarrow{\text{écriture trigonométrique}} (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2°) Formules d'Euler (1707-1783)

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Par addition et soustraction membre à membre, on obtient :
$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$
$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Autre forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}}$$

3°) Exemple d'application des formules de Moivre : formules de duplication du cosinus et du sinus

On écrit la formule $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour $n = 2$.

On obtient : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

En développant le membre de gauche par identité remarquable, on obtient :

$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

Par identification des parties réelle et imaginaire, on a $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ et $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$.

Les égalités $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ sont des formules de duplication du cosinus et du sinus.

Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ou $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

On a donc trois formules de duplication du cosinus et une formule de duplication du sinus.

On peut faire pareil pour d'autres valeurs de *n* ($n = 3$, $n = 4$, $n = 5$).
Par exemple, pour $n = 3$, on obtient $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

4°) Exemple d'application des formules d'Euler : linéarisation d'expressions trigonométriques (voir exercices)

IX. Applications à la géométrie (angles orientés)

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Le plan est orienté. On peut donc considérer des angles orientés de vecteurs.
Dans tout ce paragraphe, on ne parle que d'angles orientés.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de base du repère.

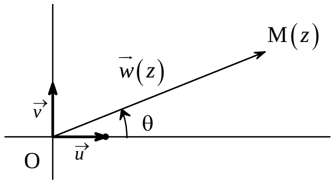
1°) Propriété 1

Formule de base à partir de laquelle tout le reste doit être démontré.

$\vec{w}(z)$ est un vecteur non nul.
$(\vec{u}, \vec{w}) = \arg z \ (2\pi)$

Attention il s'agit d'un angle orienté de vecteurs.

On note M le point tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
Le point M a pour affixe *z*.



Cette propriété découle directement de la définition des arguments pour un nombre complexe non nuls.

2°) Propriété 2

A et B sont deux points distincts.
$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} = \arg(z_B - z_A) \ (2\pi)$

Cette propriété découle immédiatement de la formule précédente.

3°) Propriété 3

$\vec{w}(z)$ et $\vec{w'}(z')$ sont deux vecteurs non nuls.
$(\vec{w}, \vec{w'}) = \arg\dfrac{z'}{z} \ (2\pi)$

Démonstration :

$\left(\vec{w}, \vec{w}'\right) = \left(\vec{w}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \vec{w}'\right)$ **(astuce de départ : relation de Chasles pour les angles orientés)**

$= -\left(\vec{u}, \vec{w}\right) + \left(\vec{u}, \vec{w}'\right)$

Propriété 1

$= -\arg z_{\vec{w}} + \arg z_{\vec{w}'}$

Propriété des arguments

$= \arg \dfrac{z_{\vec{w}'}}{z_{\vec{w}}}$

$= \arg \dfrac{z'}{z} \quad (2\pi)$

4°) Propriété 4

A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \quad (2\pi)$

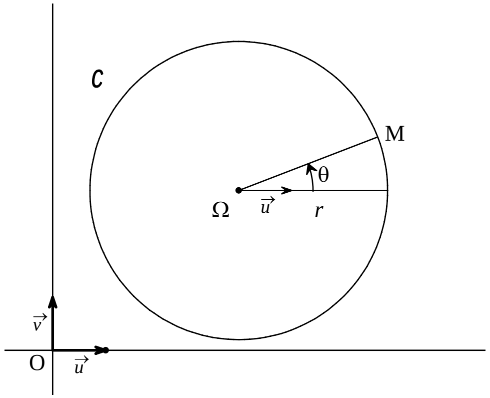
Cette propriété est une conséquence directe de la propriété précédente.

X. Équations paramétriques de cercles

1°) Propriété

$\mathcal{C}$ est un cercle $\left|\begin{array}{l}\text{de centre } \Omega(\omega) \\ \text{de rayon } r\end{array}\right.$.

$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \;/\; z = \omega + r e^{i\theta}$



Ce paramétrage correspond au repérage des points M de $\mathcal{C}$ par une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$.

Tout point M de $\mathcal{C}$ peut être repéré par une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$ (cf. graphique).

2°) Démonstration

Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe z.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = r$

$\Leftrightarrow |z - \omega| = r$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \;/\; z - \omega = r e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \;/\; z = \omega + r e^{i\theta}$

3°) Vocabulaire

- $z = \omega + r e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ est une équation paramétrique complexe du cercle $\mathcal{C}$.
- θ : un paramètre

Interprétation :

θ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$ (où M est le point de $\mathcal{C}$ associé à θ).

4°) Exemple

$\mathcal{C}$: cercle $\left|\begin{array}{l}\text{de centre } \Omega(1+2i) \\ \text{de rayon } r = 3\end{array}\right.$

Une équation paramétrique complexe de $\mathcal{C}$ est $z = 1 + 2i + 3e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$.

Il faut souligner que, dans cette équation, z est un nombre complexe.

Remarques :

- On peut limiter q à un intervalle d'amplitude 2π ouvert à une extrémité, fermé à l'autre.

Par exemple, $\theta \in [0\,;2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.

- En restreignant θ à un intervalle plus petit, on peut obtenir une représentation paramétrique complexe d'un demi-cercle, d'un quart de cercle…

5°) Équations paramétriques en coordonnées cartésiennes

On pose :

$\omega = a + \mathrm{i}b \quad \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$;

$z = x + \mathrm{i}y \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On a alors $x + \mathrm{i}y = a + \mathrm{i}b + r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ un système d'équations paramétriques du cercle $\mathcal{C}$ en coordonnées cartésiennes

coordonnées cartésiennes de M coordonnées cartésiennes de Ω

Sur la calculatrice, il existe le mode paramétrique qui permet de tracer des courbes dont on connaît les équations paramétriques.

Exemple : $\begin{cases} x = 5\cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Il s'agit d'une courbe de Lissajous.

$\begin{cases} X_{1T} = 5\cos 3T \\ Y_{2T} = \sin 2T \end{cases}$

On doit se placer en mode radian sur la calculatrice.

En physique, équation horaire, mouvement des satellites (trajectoires circulaires), étude des mouvements circulaires (vitesse angulaire instantanée, repère de Frenet : repère mobile à chaque instant).

Hypocycloïde et épicycloïde (site « Dessiner avec des mouvements » eljjdx.canalblog.com).

Récapitulatif sur les nombres complexes : comportement des opérations pour le conjugué, le module et l'argument

Opérations	**Conjugué**	**Module**	**Argument**
Somme	$\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$	$\lvert z+z' \rvert \leqslant \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$	$\arg(z+z')$ pas de formule
Produit	$\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$	$\lvert zz' \rvert = \lvert z \rvert \lvert z' \rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad (2\pi)$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)$
Puissance	$\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$\arg\left(z^n\right) = n\arg z \quad (2\pi)$

Utilisation de la calculatrice TI 83

Exemple :

Écrire $1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

Taper $\boxed{\text{mode}}$, choisir re^θi puis taper $1 + \mathrm{i}$ $\boxed{\text{entrer}}$.

Les valeurs du module et de l'argument seront données sous forme de valeurs approchées.

Passer en mode re^θi et en mode degrés.
Entrer le nombre que l'on cherche à mettre en forme exponentielle.
Le résultat est tout de suite sous la forme souhaitée.
On tape le nombre et on appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

Appendice

Compléments sur les angles orientés

On se place dans le plan orienté.

I. Modulo π

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Ces vecteurs définissent :

- un angle géométrique que l'on note $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ ou $\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)$ [on a : $\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)=\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$] ;

- deux angles orientés que l'on note $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)$ [on a : $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$].

La notation avec un chapeau désigne un angle géométrique.
La notation sans chapeau (en couple) désigne un angle orienté.

Pour un angle géométrique, l'ordre des vecteurs n'a pas d'importance.
Pour un angle orienté, l'ordre des vecteurs a une importance.

Pour considérer un angle géométrique de vecteurs (non nuls), il n'est pas nécessaire que le plan soit orienté.
Pour considérer un angle orienté de vecteurs (non nuls), il est nécessaire que le plan soit orienté.

① Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0 \quad (\pi)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$

② Justification

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=0$ ou $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\pi$

$\Leftrightarrow 0$ ou π est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0 \quad (\pi)$

On peut aussi écrire $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=0 \quad (\pi)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$

On peut aussi écrire $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

II. Angles orientés et lieux géométriques (1)

① Exercice

Soit A et B deux points distincts du plan orienté.

- Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=0 \quad (2\pi)$.

- Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

- Déterminer l'ensemble G des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)=\pi \quad (2\pi)$.

Solution :

On doit faire des figures pour se représenter dans sa tête.

Mathilde Nicolas le 24-3-2015 :

On sait où on se place sur le cercle lorsque $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ en fonction du sens de l'angle.

Elle m'a fait ensuite deux schémas avec la droite (AB) oblique.

Elle voulait m'expliquer qu'on tenait compte de l'orientation.

• L'ensemble E est la demi-droite]AB).

• L'ensemble F est la demi-droite ouverte d'origine A dont la direction et le sens sont donnés par un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ [on dit parfois que la demi-droite a pour repère $\left(A\ ;\ \vec{u}\right)$].

• L'ensemble G est le segment ouvert]AB[(segment fermé [AB] privé de A et de B).

Dans un angle orienté, les vecteurs ne peuvent pas être des vecteurs nuls.

Exemples :

Pour pouvoir considérer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$, M doit être différent de A.
Pour pouvoir considérer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$, M doit être différent de A et de B.

② On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

$M \in]Ox) \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = 0\ \ (2\pi)$

$M \in]Ox') \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \pi\ \ (2\pi)$

$M \in]Oy) \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$

$M \in]Oy') \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$

III. Angles orientés et lieux géométriques (2) : caractérisation angulaire du cercle

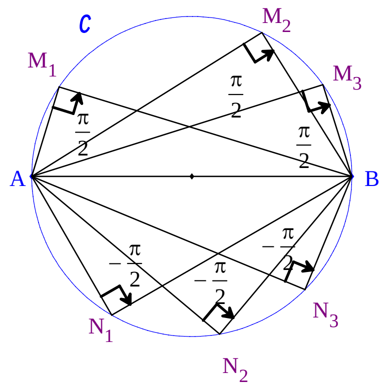
① Propriété fondamentale

Soit A et B deux points distincts du plan orienté.

• L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ est un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.

• L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ est l'autre demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.

• L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.



Angle droit direct (cf. codage sur la figure).

Angle droit indirect (cf. codage sur la figure).

La figure ci-dessus illustre le cas où (AB) est « horizontale ».
On peut faire une figure similaire dans le cas où (AB) est « oblique » ou même « verticale ».

Soit A et B deux points distincts du plan.
On considère les demi-cercles de diamètre [AB].
Nous admettrons que tous les points M de l'un des demi-cercles privé de A et de B vérifient $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ et que tous les points de l'autre demi-cercle privé de A et de B vérifient $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

Formulation à l'aide d'un angle géométrique :

L'ensemble des points M du plan (non orienté) tels que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$ (ou $\widehat{AMB} = 90°$) est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.

② Propriété admise (« arc capable »)

Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit θ un réel fixé qui n'est pas de la forme $k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \theta \ (2\pi)$ est un arc de cercle d'extrémités A et B (ces extrémités n'étant pas comprises).

Remarques :

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ sont des cas particuliers qui ont été étudiés dans le paragraphe ①.

- Par exemple, il n'est pas possible de déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ (cela n'a pas été fait en 1ère S).

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit θ un réel fixé.

Soit E l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \theta \ (2\pi)$.

1er cas : θ n'est pas de la forme $k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

E est un arc de cercle d'extrémités A et B (ces extrémités n'étant pas comprises).

2e cas : θ est de la forme $2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$E = (AB) \setminus [AB]$ (réunion de deux demi-droites ouvertes)

3e cas : θ est de la forme $\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$E =]AB[$ (segment ouvert)

4°) Complément : méthode du point test

Savoir quel demi-cercle. On peut utiliser un point quelconque sur l'un des demi-cercles.

On essaie de répondre en utilisant les éléments de la figure :

« L'ensemble est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ contenant le point C ou ne contenant pas le point C ».