

## Limites de fonctions (2) Calculs de limites

### I. Règles d'opérations algébriques sur les limites (admisses sans démonstration)

$a$  désigne soit un réel, soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ .  
 $m$  et  $n$  sont deux réels.

#### 1°) Limite d'une somme

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$m$	$m$	$m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] =$	$m + n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

#### 2°) Limite d'un produit

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$m$	$m > 0$	$m < 0$	$m > 0$	$m < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] =$	$m \times n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

#### 3°) Limite d'un quotient

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$m$	$m$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$m > 0$ ou $+\infty$	$m > 0$ ou $+\infty$	$m < 0$ ou $-\infty$	$m < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$n \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$n > 0$	$n < 0$	$n > 0$	$n < 0$	$0$ en restant positif	$0$ en restant négatif	$0$ en restant positif	$0$ en restant négatif	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{m}{n}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

**N.B. :** Dans les trois lignes de chaque tableau,  $x$  doit tendre vers la même « chose ».

### II. Compréhension des tableaux

Les trois tableaux du paragraphe précédent ne nécessitent pas vraiment de mémorisation particulière. Les résultats des trois tableaux sont admis mais se retrouvent intuitivement très facilement comme nous allons le voir sur des exemples.

#### 1°) Limite d'une somme

Exemples :

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 5$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty$ .

#### 2°) Limite d'un produit

Exemples :

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = 6$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = +\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = -\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = -\infty$ .

#### 3°) Limite d'un quotient

Exemples :

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  (« 2 sur un très grand nombre ça fait 0 »).
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$  (2 sur un nombre positif très proche de 0, ça fait  $+\infty$  »).
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ .

### III. Formes indéterminées

#### 1°) Examen

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors les règles sur la limite d'une somme ne permettent pas de donner

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ . On dit que l'on a une forme indéterminée ou une indétermination du type «  $\infty - \infty$  ».

Pour déterminer la limite, il faut transformer l'écriture de  $f(x) + g(x)$  pour voir le terme qui tend le plus vite vers  $+\infty$  (croissance comparée).

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , alors les règles sur la limite d'un produit ne permettent pas de donner

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$ ; on dit que l'on a une forme indéterminée ou une indétermination du type «  $0 \times \infty$  ».

**N.B. :** On apprend que «  $0 \times$  n'importe quoi ça fait 0 ».

Cela dit le n'importe quoi en question doit être un nombre (et non pas  $-\infty$  ou  $+\infty$  qui ne sont pas des nombres).

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , alors les règles sur la limite d'un quotient ne permettent pas de donner

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ; on dit que l'on a une forme indéterminée ou une indétermination du type «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , alors les règles sur la limite d'un quotient ne permettent pas de donner

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ; on dit que l'on a une forme indéterminée ou une indétermination du type «  $\frac{0}{0}$  ».

#### 2°) Bilan : 4 types de FI qu'on écrit symboliquement

«  $+\infty - \infty$  »

«  $0 \times \infty$  »

«  $\frac{\infty}{\infty}$  »

«  $\frac{0}{0}$  »

#### 3°) Commentaires

- À noter «  $+\infty - \infty$  » est bien une F.I. mais pas «  $\infty \times \infty$  » (n'est pas une F.I.).

- Lorsque l'on rencontre une F.I., on ne peut pas déterminer la limite à partir des opérations algébriques.

Pour lever l'indétermination, on doit utiliser des méthodes particulières (croissance comparée pour une somme par exemple).

Les F.I. seront étudiées en T<sup>ale</sup>.

### IV. Exemples de calculs de limites

#### 1°) Exemple 1

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x)$ .

On « sépare » (on décompose) :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'une somme (tableau 1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x) = +\infty.$$

#### 2°) Exemple 2

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x + \frac{3}{x} \right)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{x} \right) = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'une somme (tableau 1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x + \frac{3}{x} \right) = +\infty.$$

#### 3°) Exemple 3

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{1}{x} + 3 \right)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3) = 3 \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'une somme (tableau 1) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{1}{x} + 3 \right) = +\infty.$$

#### 4°) Exemple 4

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( 2x - \frac{5}{x} \right)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( -\frac{5}{x} \right) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'une somme (tableau 1) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( 2x - \frac{5}{x} \right) = -\infty.$$

### 5°) Exemple 5

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(1-x^2)]$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x^2) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un produit (tableau 2) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(1-x^2)] = -\infty.$$

C'est plus-moins (règle des signes)

(On pense «  $(+\infty) \times (-\infty)$  » mais on ne l'écrit pas !)

### 6°) Exemple 6

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x+1}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient (tableau 3) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x+1} = 0.$$

## V. Limite à droite ; limite à gauche

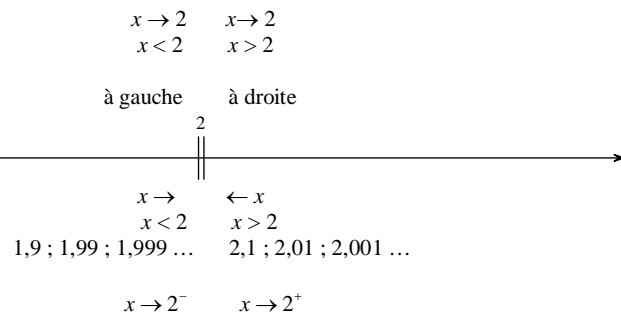
### 1°) Tendre vers un nombre par valeurs supérieures ou inférieures

Nous verrons dans la suite du cours, que l'on doit parfois faire tendre  $x$  vers un réel  $a$  par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

On a déjà vu cette notion pour la limite en 0 de la fonction « inverse » ; on a vu qu'il y avait deux cas suivant que  $x$  tendait vers 0 par valeurs positives ou par valeurs négatives.

### 2°) Exemple

On peut faire tendre  $x$  vers 2 par valeurs supérieures ou on peut faire tendre  $x$  vers 2 par valeurs inférieures.



Attention : le + et le - ne signifient pas positif ou négatif ici.

### 3°) Signification des écritures

$x \rightarrow a^-$ signifie $x \xrightarrow{x < a} a$	$x \rightarrow a^+$ signifie $x \xrightarrow{x > a} a$
--	--

On retiendra que l'on peut écrire sous deux formes «  $x$  tend vers  $a$  par valeurs supérieures » :

$x \xrightarrow{x > a} a$  ou plus simplement  $x \rightarrow a^+$ .

De même, on peut écrire sous deux formes «  $x$  tend vers  $a$  par valeurs inférieures » :

$x \xrightarrow{x < a} a$  ou plus simplement  $x \rightarrow a^-$ .

Par exemple,

• on peut écrire sous deux formes :  $x \xrightarrow{x > 2} 2$  ou plus simplement  $x \rightarrow 2^+$ .

• on peut écrire sous deux formes :  $x \xrightarrow{x < 2} 2$  ou plus simplement  $x \rightarrow 2^-$ .

### 4°) Remarque

Attention à la présence de parenthèses lorsque le  $a$  :

• est précédé d'un signe -

**Exemples :**  $x \xrightarrow{x > -1} -1$  s'écrit  $x \rightarrow (-1)^+$  (présence de parenthèses obligatoires).

$x \xrightarrow{x < -1} -1$  s'écrit  $x \rightarrow (-1)^-$  (présence de parenthèses obligatoires).

• est écrit comme une somme, un produit, un quotient :

**Exemples :**  $x \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} \frac{1}{2}$  s'écrit  $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$

$x \xrightarrow{x > 2\sqrt{3}} 2\sqrt{3}$  s'écrit  $x \rightarrow (2\sqrt{3})^+$

Attention : le + et le - ne signifient pas positif ou négatif dans une écriture telle que  $a^+$  ou  $a^-$  sauf lorsque  $a$  est nul (dans les écritures  $0^+$  ou  $0^-$ ).

En fait, on met des parenthèses comme pour les puissances (Thomas Delamarre le 7-1-2014).

## VI. Signe d'une quantité qui tend vers 0 (« signe du 0 »)

### 1°) Principe

Lorsque le résultat d'une limite est 0, on va parfois préciser « son signe ».

• L'écriture  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$  signifie que :

- 1)  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$  ;
- 2) la fonction  $f$  prend des valeurs positives pour  $x$  proche de  $a$ .

• Signification analogue pour l'écriture :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$  (la fonction  $f$  prend des valeurs négatives pour  $x$  proche de  $a$ ).

Nous verrons dans le paragraphe l'utilisation et l'importance de cette précision.

### 2°) Exemples simples

- ①  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$  (écriture symbolique)
- ②  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  (un carré est toujours positif)
- ③  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

### 3°) Exemples plus compliqués ; utilisation d'un tableau de signes

① Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)$ .

• On a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$

Donc au début, on se contente d'écrire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ .

• On fait le tableau de signes de  $x-1$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
Signe de $x-1$	$-$	$\rightarrow 0 \leftarrow$ $x < 1$ $x > 1$ $1^-$ $1^+$	$+$

• On complète ensuite après avoir observé le tableau :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0^-$ .

② Déterminer  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 4)$  et  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2 - 4)$ .

• Pour l'instant, on se contente d'écrire  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 4) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2 - 4) = 0$ .

• On fait un tableau de signes de  $x^2 - 4$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$	$+$	$0$	$-$	$0$ $+$

• On complète ensuite après avoir observé dans le tableau (on regarde le signe immédiatement avant  $-2$  et immédiatement après  $-2$ ).

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 4) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2 - 4) = 0^-$$

Danger : ne pas associer le  $+$  de  $(-2)^+$  au signe de 0.

C'est pour ça qu'il faut faire un tableau de signes.

### 4°) Remarque

Si le résultat d'une limite est un nombre autre que 0, il est inutile de connaître davantage de précision sur le résultat de cette limite.

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , cela ne sert à rien de savoir si c'est  $1^+$  ou  $1^-$  (on peut l'écrire mais on ne s'en sert pas).

Thomas Delamarre signale cependant le 7-1-2014 que cela pourrait servir à connaître la position locale d'une courbe par rapport à une asymptote horizontale ou verticale au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

## VII. Une technique particulière pour les quotients

1°) Cas d'un quotient où la limite du dénominateur est nulle : rappel du tableau

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$m > 0$ ou $+\infty$	$m > 0$ ou $+\infty$	$m < 0$ ou $-\infty$	$m < 0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

### 2°) Moyen mnémotechnique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas de la limite d'un quotient dans le cas particulier où :

- le numérateur tend vers un nombre (non nul)
- le dénominateur tend vers 0.

On sait d'après le tableau 3 que le résultat de la limite sera égal à  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

(Retenir qu'« un nombre sur un truc qui tend vers 0, ça fait l'∞ ».)

Le signe est déterminé par la **règle des signes** (signe de la limite du numérateur et signe du 0 pour la limite du dénominateur) : c'est pour cela qu'il est important de savoir si c'est  $0^+$  ou  $0^-$  (voir exemple).

### 3°) Exemple

Étudier la limite quand  $x$  tend vers 1 de  $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ .

Il s'agit de la limite d'un quotient. On étudie séparément la limite du numérateur et la limite du dénominateur.

Numérateur :  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+5) = 7$  (7 a un signe défini)

Dénominateur :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  (0 n'a pas de signe défini donc il faut trouver son signe ; en fait, c'est  $0^+$  ou  $0^-$ ).

→ tableau de signes du dénominateur

On fait le tableau de signes de  $x-1$ .

$x$	$-\infty$		$1$	$+\infty$
Signe de $x-1$	-		$\rightarrow \phi \leftarrow$ $x < 1$ $x > 1$ $1^-$ $1^+$	+

Comme il y a un changement de signe au niveau de la valeur 1, il y a deux limites à faire.

On étudie la limite de  $f$  de part et d'autre de 1.

On va faire avec  $1^+$  et  $1^-$ .

Lorsqu'on trouve 0 au dénominateur, on doit faire un tableau de signes.

(C'est uniquement quand on trouve 0 qu'on doit faire un tableau de signes).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+5) = +7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

(On détermine le signe en fonction des deux signes + et + : donc on obtient +).

Explication pour les deux limites :

On remplace par 1 dans chacune des deux expressions.

Le  $0^+$  signifie que l'expression  $x-1$  est positive lorsque  $x$  est au voisinage de 1 à droite.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+5) = +7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

(On détermine le signe en fonction des deux signes + et - : donc on obtient -).

Il y a deux résultats à donner.

Il y a deux limites : une limite à droite et une limite à gauche et elles sont différentes.

On voit bien ici l'intérêt de la notation symbolique :  $0^+$  et  $0^-$ .

### 4°) Retenir

On retiendra que lorsqu'il y a un changement de signe au niveau de la valeur d'annulation du dénominateur, il y a deux limites à faire : une limite à droite et une limite à gauche.

## VIII. Limite des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ ou en $-\infty$

### Le 16-1-2022

Méthode pour montrer d'où ça vient : On factorise brutalement par le monôme de plus haut degré.

### 1°) Règles sur les monômes de plus haut degré

#### • Règle 1

La limite d'une **fonction polynôme non nulle** en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

#### • Règle 2

La limite d'une **fonction rationnelle non nulle** en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient **simplifié** de ses monômes de plus haut degré.

### Le 5-1-2020

#### Définition (rappel) :

Une fonction polynôme est une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par une expression de la forme

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  où  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  sont des réels avec  $a_n \neq 0$  appelés coefficients du polynômes.

On peut écrire  $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ .

L'entier naturel  $n$  est le degré de  $f$ .

$a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}, a_n x^n$  sont appelés les monômes qui constituent  $f(x)$ .

$f(x)$  est la somme de ces monômes.

Le monôme de plus haut degré est  $a_n x^n$ .

On suppose que  $n \geq 1$  sans quoi le polynôme est constant et on trouve tout de suite les limites.

La règle 1 dit que la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de  $a_n x^n$ .

Il en résulte qu'un polynôme non constant tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  en  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

On ne se concentre que sur le monôme de plus haut degré.

### Définition (rappel) :

Une fonction rationnelle est une fonction  $h$  admettant une expression de la forme  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions polynômes,  $g$  étant non nulle.

En notant  $n$  et  $p$  les degrés respectives de  $f$  et  $g$ ,  $f$  et  $g$  admettent des expressions de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{et} \quad g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

La règle 2 dit que pour trouver la limite de  $h(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , on doit prendre le quotient

$$\frac{a_n x^n}{b_p x^p}, \text{ le simplifier et calculer la limite.}$$

### 2°) Exemples

•  $f: x \mapsto \boxed{5x^3} - \boxed{2x} - \boxed{1}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$f$  est une fonction polynôme non nulle (de degré 3).

Le monôme de plus haut degré de  $f(x)$  est  $5x^3$ .

Donc d'après la règle 1,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$$

•  $f: x \mapsto \frac{5x^2 - x + 1}{x + 3}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$f$  est une fonction rationnelle non nulle.


Le monôme de plus haut degré du numérateur de  $f(x)$  est  $5x^2$ .

Le monôme de plus haut degré du dénominateur de  $f(x)$  est  $x$ .

Le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur est  $\frac{5x^2}{x}$  qui se simplifie en  $5x$ .

Donc d'après la règle 2,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x) = +\infty$$

 Ne pas s'arrêter là      Il faut absolument écrire la limite avec le quotient simplifié.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x) = -\infty$$

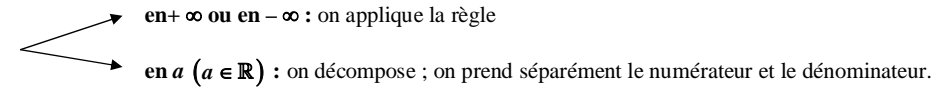
### 3°) Récapitulatif

**Attention :**

La règle ne s'applique que pour des fonctions polynômes et rationnelles non nulles  $\text{en } +\infty \text{ ou en } -\infty$ .

**La règle ne s'applique exclusivement qu'à des fonctions polynômes en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .**

**Limite d'une fonction rationnelle non nulle**



### 4°) Justification de la règle des polynômes sur un exemple

$f: x \mapsto x^3 - 2x - 1$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

On cherche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

On rencontre une forme indéterminée du type «  $\infty - \infty$  ».

**Méthode :**

On factorise par ce qui tend « le plus vite » vers  $+\infty$ .

On factorise brutalement par le monôme de plus haut degré.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x^3 \left( 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \quad \leftarrow \text{On « force » la factorisation par la plus grand puissance de } x.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) &= 1 - 0 - 0 = 1 \end{aligned} \right\} \text{ donc par limite d'un produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On retiendra que pour démontrer la règle pour les fonctions polynômes ou rationnelles, on factorise « brutalement ».

## Le 16-1-2015

Cette règle aurait pu être donnée dans les suites.

C'est Vianney Dardonville qui m'a fait la remarque ; il regrette que je ne l'ai pas donnée au moment des limites de suites car cela aurait évité de devoir factoriser à chaque fois.

Cette règle peut être utilisée pour les limites de suites.

## IX. Commentaires

### 1°) Limites et ensemble de définition

#### Quelles limites doit-on calculer pour une fonction ?

Nous n'aurons à étudier que les limites de fonctions aux **bornes ouvertes** de leurs ensembles de définition. Les bornes sont les extrémités (pas les extremums !).

#### Exemples :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

On devra étudier les limites en  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $2^-$  et  $2^+$ .

On n'étudie pas les limites en un nombre de l'ensemble de définition pour la bonne raison que la limite sera égale à l'image. (Par exemple, la limite de  $f$  en 3 est égale à  $f(3)$  ; ça ne sert à rien).

- $\mathcal{D}_f = [3; +\infty[$

On devra étudier la limite en  $+\infty$  uniquement (pas en 3 qui est une borne fermée).

### 2°) Où mettre les limites dans un tableau de variations ?

On les place aux extrémités des flèches.

#### Doubles-barres et limites.

#### Exemples :

limite en  $+\infty$

En gros c'est quand  $x$  égale  $+\infty$ .

$2^+$  : c'est plus de 2 ; 2 exclu.

Dans le tableau, c'est à partir du 2 jusqu'à l'extrémité du tableau.

Faire un tableau de variations seulement sur un intervalle de l'ensemble de définition.

Exemple : sur  $\mathcal{D}_f = ]-1; +\infty[$

Où doit-on mettre une double barre ?

### 3°) Précision des signes

On ne précise  $0^+$  ou  $0^-$  pour le résultat d'une limite que pour les étapes intermédiaires.

Par contre, on ne le fait jamais si c'est un nombre autre que 0 (exemple : on ne précise jamais  $2^-$  ou  $2^+$  pour le résultat d'une limite).

Dans tous les calculs de limites, on utilise de manière implicite le fait que si  $f$  est définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Cette propriété est à relier à la notion de fonction continue en un réel.

Il est à noter que les **logiciels de calcul formel ou scientifique** permettent d'obtenir des limites.

## Le 18-1-2024

Détermination d'une limite avec dcode (taper « dcode limite » sur Google) ou matematica.