1$^{\text{ère}}$ S

Limites de fonctions (1)
Approche intuitive ; limites des fonctions de référence

Dans ce chapitre, on laisse provisoirement de côté les dérivées.

Plan du chapitre :

I. Introduction

1°) Rappel

• **Déjà vu :** notion de « x tend vers » dans le chapitre sur le nombre dérivé d'une fonction.

$$\lim_{x \to 0} (x+4) = 4$$

$$\lim_{x \to 1} (x+4) = 5$$

Nous avions alors appliqué sans le dire la règle suivante (admise sans démonstration) valable pour les fonctions que nous rencontrerons cette année (telles que fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonctions trigonométriques) :

> ***f* est une fonction définie sur un intervalle I.**
> **Si $a \in \mathrm{I}$, alors on a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.**

• **Nouveauté**

$$\lim_{x \to +\infty} x^2$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2$$

2°) Commentaire

Quand on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$:

• on regarde ce qu'il y a sous le lim :

$$x \longrightarrow +\infty$$

flèche « tend vers » ($\neq$ flèche « associe » $\mapsto$)

• on remplace x par de très grands nombres.

$x \longrightarrow +\infty$: par de très grands nombres positifs.

$x \longrightarrow -\infty$: par de très grands nombres négatifs.

• Ensuite, on regarde.

3°) Remarque

$$\left| \lim_{x \to +\infty} \right| x^2$$

Intérêt : Mettre les limites dans les tableaux de variations.

II. La fonction « carré »

1°) Tableau de variation

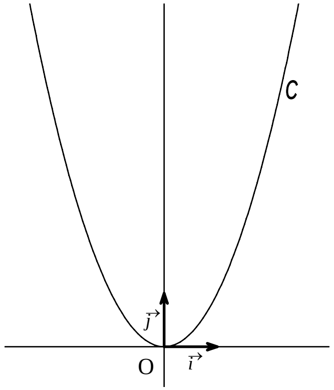
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			extremum		

Repasser en rouge les limites.

2°) Écriture

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty} \quad = \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty}$$

3°) Courbe représentative



III. La fonction « cube »

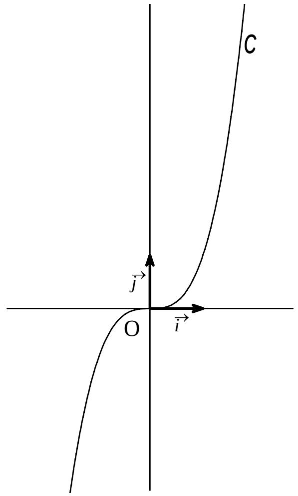
1°) Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) Écriture

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty} \quad \neq \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$$

3°) Courbe représentative



IV. La fonction « racine carrée »

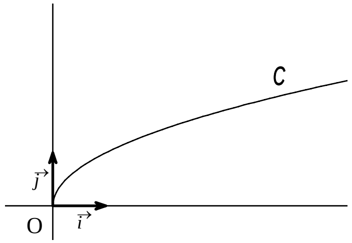
1°) Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$
	extremum		**limite**

2°) Écriture

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty}$$

3°) Courbe représentative



V. La fonction « inverse »

1°) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

2°) Écriture

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty}$

(il y a 2 cas)

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty}$

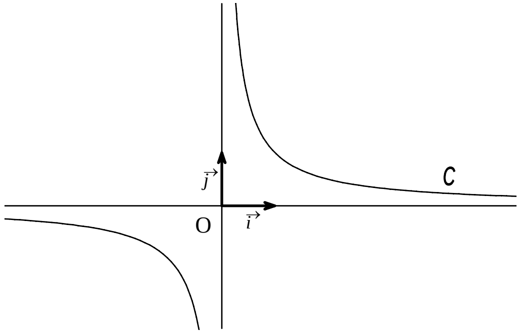
N.B. : 0 n'est jamais atteint ; c'est une limite.

Pour les limites en + ∞ et – ∞, on peut prendre l'exemple d'un euro que l'on partagerait pour tous les habitants de la planète. Chacun recevrait presque rien.

Pour la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, on peut prendre l'exemple d'une division par 0,1, 0,01, 0,001 ; on obtient 10, 100, 1000 c'est-à-dire des nombres de plus en grands positifs.

Pour la limite quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, on peut prendre l'exemple d'une division par – 0,1, – 0,01, – 0,001 ; on obtient – 10, – 100, – 1000 c'est-à-dire des nombres négatifs de plus en grands en valeur absolue.

3°) Courbe représentative



Il s'agit d'une seule courbe constituée de deux morceaux.

Branches infinies

La courbe de la fonction « inverse » admet les axes de coordonnées pour **asymptotes** c'est-à-dire qu'elle s'en rapproche sans jamais les toucher.
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale en – ∞ et en + ∞.

L'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

Complément :

Rappel de vocabulaire :

● Bornes d'un intervalle :

Exemple : $I =]3\,;+\infty[$
Les bornes de I sont 3 et + ∞.
Ce sont des bornes ouvertes.

● Bornes d'une réunion d'intervalles

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ (réunion de deux intervalles ouverts).

On dit que – ∞, 0 et + ∞ sont les bornes de l'ensemble de définition de f.

Les limites de f en ces bornes sont les seules intéressantes à étudier.

Ce sont elles qui donnent les asymptotes horizontales et/ou verticales de la courbe représentative.

Pour la courbe représentative de la fonction inverse, on a deux asymptotes !
- 1 horizontale
- 1 verticale.

VI. Limites de référence (à savoir par cœur)

n est un entier naturel non nul.

1°) Règle 1

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(x^n\right) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \left(x^n\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6\ldots) \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\ldots) \end{cases}}$$

2°) Règle 2

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty}$$

3°) Règle 3

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \end{array}}$$

4°) Règle 4

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6\ldots) \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\ldots) \end{cases}}$$

Remarque : Lorsque n est pair, il n'y a pas lieu de distinguer 0^+ et 0^-.

Lorsque n est pair, on peut écrire $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty}$.

5°) Règle 5 (limite d'une fonction constante)

k est un réel fixé.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} k = k}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} k = k}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} k = k} \quad (a \in \mathbb{R})$$

VII. Conséquence

On peut déduire de manière « logique » les limites de fonctions associées aux fonctions de référence.

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

(⚠ le $-$ est à l'extérieur du carré)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x^2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Remarque :

Dans les exercices, on nous demandera de calculer les limites pour compléter les tableaux de variations (on les met en plus des extremums et non pas à la place des extremums !).

On mettra les limites et les extremums.

Les limites doivent être cohérentes avec le sens de variation.

VIII. Remarques d'écriture

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2\right)$$

1°) Flèche « tend vers » : $\longrightarrow$

$\neq$

« a pour image » $\mapsto$
« associe »

2°) $\left|\lim\limits_{x \to +\infty}\right|$

3°) Parenthèses

obligatoires pour une somme, une différence, un produit

facultatives sinon

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

pas de parenthèses

IX. Tableaux de variations et limites

Dans les tableaux de variations, on porte en général les limites et les extremums.

Pour une fonction *f*, on devrait écrire sur la deuxième ligne : « Variations de *f* et limites » ou « Variations de *f*, extremums et limites ».

x	
Variations de *f* et limites	

x	
Variations de *f* Extremums Limites	

Il s'agit des limites aux bornes de l'ensemble de définition.

X. Fonctions n'ayant pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$

Propriété admise :

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $\mathrm{T} > 0$, n'admet pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Exemples fondamentaux : Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.