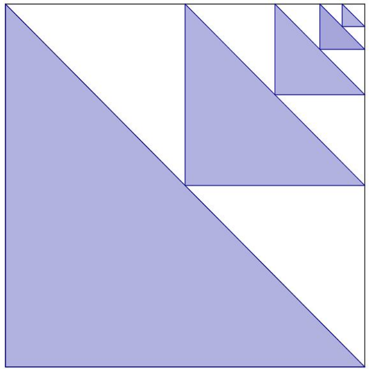
TS1

Contrôle du jeudi 6 décembre 2012 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

I. (5 points) On considère la figure suivante réalisée à partir d'un carré de côté 1.

On construit des triangles isocèles rectangles (colorés) en partant du bas. On note u_1 l'aire du premier triangle, u_2 l'aire du deuxième triangle etc.



1°) Compléter la phrase :

« (u_n) est une suite …………………………

de premier terme $u_1 =$ ……… et de raison ……… . »

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n la somme des aires des n premiers triangles.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Justifier.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (5 points)

Relier chaque suite à la propriété qui lui correspond.

Suites	Propriétés
$(-n)$ •	• Majorée et non minorée
$\left((0,2)^n\right)$ •	• Bornée et divergente
$\left((-1)^n\right)$ •	• Convergente vers 0 et non monotone
$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ •	• Non majorée et ne tend pas vers $+\infty$
$\left((-2)^n\right)$ •	• Strictement positive et de limite 0

III. (1 point)

Soit I = $]a\,;\,b[$ un intervalle ouvert contenant 0 (on a donc $a < 0 < b$). On pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant$ N, alors $u_n \in$ I.

N = ……………………. (écrire un seul résultat)

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (7 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2}$ pour tout entier naturel n.

On admettra sans démonstration que tous les termes de la suite sont strictement positifs (récurrence).

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) En déduire que la suite (u_n) converge. Citer le théorème utilisé.

3°) On note l la limite de (u_n). Justifier rigoureusement que l'on a : $l = \dfrac{l}{(1+l)^2}$. En déduire la valeur de l.

4°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}001$. Compléter les pointillés de la partie « Traitement ».

Initialisations :
n prend la valeur 0
U prend la valeur 1

Traitement :
Tantque ………………….. **Faire**
U prend la valeur $\dfrac{\mathrm{U}}{(1+\mathrm{U})^2}$
n prend la valeur $n + 1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Bonus :

Réaliser le programme correspondant sur calculatrice et indiquer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}001$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

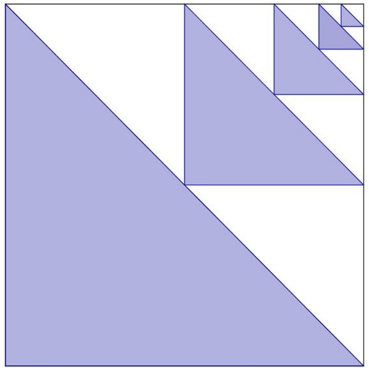
………

………

………

Corrigé du contrôle du 6-12-2012

I.



1°) Pour passer d'un triangle au suivant, on multiplie les dimensions par $\frac{1}{2}$ (on effectue une réduction de rapport $\frac{1}{2}$). Donc l'aire est à chaque fois multipliée par $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

(u_n) est une suite **géométrique** de premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

2°) S_n : somme des aires des n premiers triangles $\quad (n \geqslant 1)$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

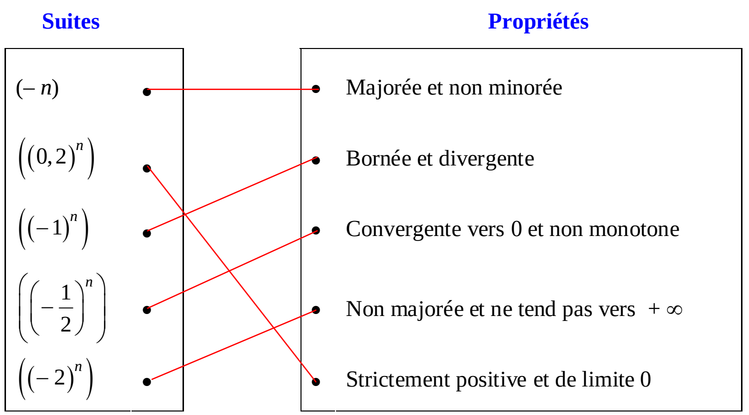
D'après la formule sommatoire* donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$,

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{2}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 1$

Donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

II.



III.

I = $]a\,;\,b[$ un intervalle ouvert contenant 0 (on a donc $a < 0 < b$).

On pose $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminons le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant$ N, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

$$\begin{aligned}
u_n \in \mathrm{I} \quad &\Leftrightarrow \quad a < \frac{1}{n} < b \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < b \qquad \text{(l'inégalité } a < \frac{1}{n} \text{ est toujours satisfaite car } a < 0 \text{ et } n > 0 \text{ donc } \frac{1}{n} > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{b} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{1}{b}\right) + 1
\end{aligned}$$

Conclusion : Le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ est $\mathbf{N = E\left(\frac{1}{b}\right) + 1}$.

IV. $u_n = \frac{n}{(n+1)^2}$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{n}{n^2+2n+1}$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(n+2+\dfrac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n+2+\dfrac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+2+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

V. (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2} \end{cases}$

1°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).**

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2}-u_n$

$$= u_n\left[\frac{1}{(1+u_n)^2}-1\right]$$

$$= u_n \times \frac{1-(1+u_n)^2}{(1+u_n)^2}$$

$$= u_n \times \frac{-u_n{}^2-2u_n}{(1+u_n)^2}$$

$$= -u_n{}^2 \times \frac{u_n+2}{(1+u_n)^2}$$

On a : $u_n > 0$ (résultat que l'énoncé demande d'admettre) d'où $u_n{}^2 > 0$ et $u_n + 2 > 0$; de plus, $(1+u_n)^2 > 0$.

Donc $-u_n{}^2 \times \dfrac{u_n+2}{(1+u_n)^2} < 0$.

Par suite, $u_{n+1}-u_n < 0$.

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n < 0$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2°) **Déduisons-en que la suite (u_n) converge.**

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (résultat que l'énoncé demande d'admettre).
Or toute suite décroissante minorée converge.
Donc la suite (u_n) est convergente.

3°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

• Justifions que : $l = \dfrac{l}{(1+l)^2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} =$

l car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

$\dfrac{l}{(1+l)^2}$ (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2}$; on utilise les propriétés d'opérations algébriques (limite d'un produit, d'un quotient).

Donc par unicité de la limite d'une suite (il ne peut y avoir qu'une seule limite), on a : $l = \dfrac{l}{(1+l)^2}$ (1).

• Déduisons-en la valeur de l.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow l(1+l)^2 = l \\ &\Leftrightarrow l\left[(1+l)^2-1\right]=0 \\ &\Leftrightarrow l\left(2l+l^2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow l^2(2+l)=0 \\ &\Leftrightarrow l^2=0 \text{ ou } 2+l=0 \\ &\Leftrightarrow l=0 \text{ ou } l=-2 \end{aligned}$$

Or la suite (u_n) est minorée par 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4°) Algorithme à compléter.

Il s’agit d’un algorithme de détermination de valeur seuil.

Initialisations :
n prend la valeur 0
U prend la valeur 1

Traitement :
Tantque **U $\geqslant$ 0,001** **Faire**
U prend la valeur $\dfrac{U}{(1+U)^2}$
n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

En faisant tourner le programme, on obtient (au bout d’un temps assez long), l’affichage : 498.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}001$ est **498**.

On peut d’ailleurs vérifier que $\boldsymbol{u_{498} = 0{,}0009991...}$