1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 3 décembre 2012 (30 min)

Prénom et nom : …………………………………………… **Note :** …….. **/ 20**

• Ne rien écrire sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.

• Tirer tous les traits de fractions à la règle.

I. (2 points) Question de cours

Soit f une fonction définie sur intervalle I. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartiennent à I.
On note A et M les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et $a + h$.

Donner l'expression du coefficient directeur de la droite (AM).

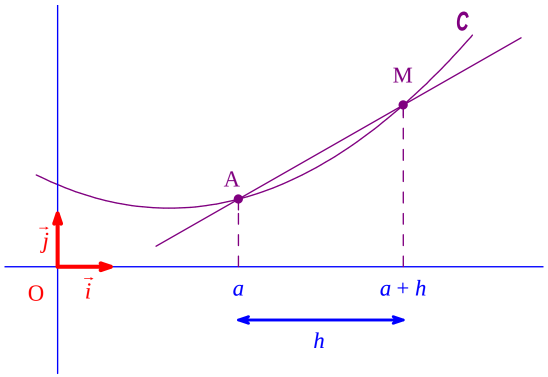


Figure pour $h > 0$

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à ………………………………….. .

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note A le point de coordonnées (– 1 ; – 2) ; on vérifie aisément par le calcul que A $\in \mathcal{C}$.

Partie A

On se propose d'observer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point A.
Sur la figure (1) ci-dessous, on donne la courbe représentative de la fonction f pour $x \in [-4 ; 0{,}5]$.
Les figures (2) et (3) ont été obtenues en effectuant des agrandissements successifs autour du point A.

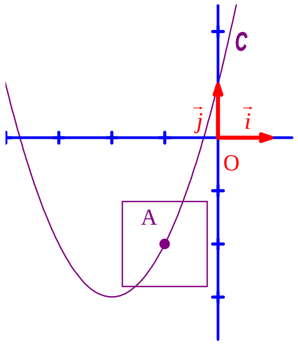


Fig. (1)

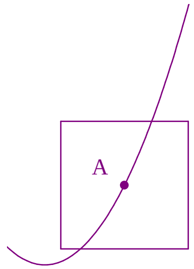


Fig. (2)

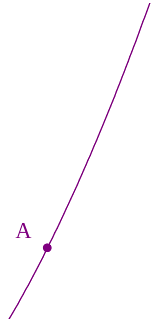


Fig. (3)

Observer ces figures.
Sur la calculatrice, représenter la fonction f puis, à l'aide de la fonction « zoom » (« zoombox ») de la calculatrice, effectuer des agrandissements successifs au voisinage du point A.
Commenter en une phrase le tracé obtenu sur la figure (3).

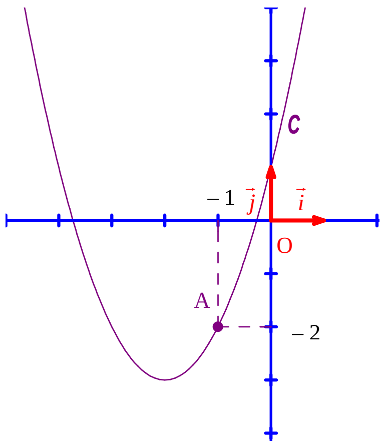
……..

……..

Partie B

On admet que la tangente D à $\mathcal{C}$ au point A a pour équation $y = 2x$.

1°) Tracer D sur le graphique ci-dessous.



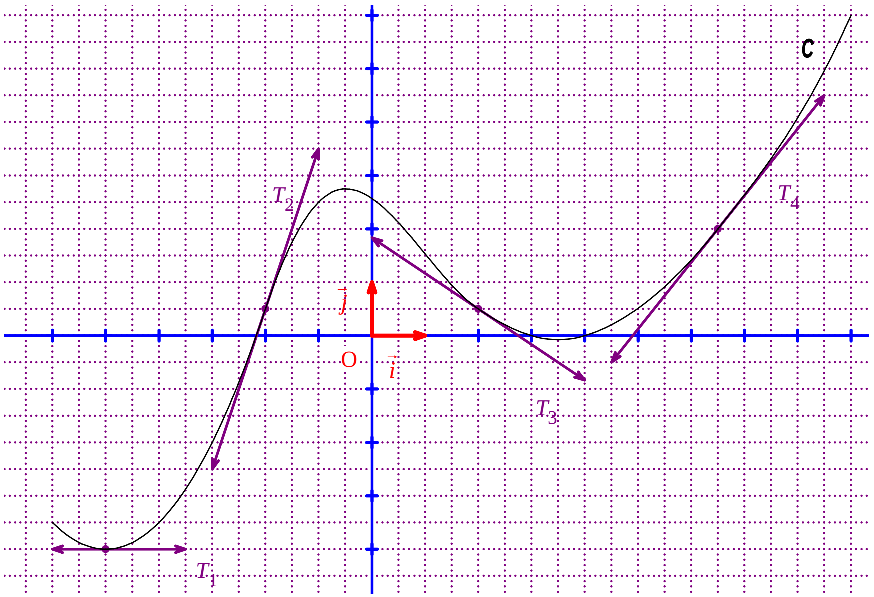
2°) Faire un commentaire en une phrase sur l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point A en utilisant cette tangente.

……..

……..

III. (8 points)

On donne sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6\ ;\ 9]$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quatre tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 sont également tracées sur le graphique.



1°) Lire graphiquement les valeurs de $f'(-5)$, $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(6{,}5)$.

$f'(-5) =$ ……….. $f'(-2) =$ ……….. $f'(2) =$ ……….. $f'(6{,}5) =$ ………..

2°) On donne $f'(-3) = 2$. On note T_5 la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -3.
Compléter la phrase suivant qui permet de définir T_5 :

T_5 est la droite qui passe par ……. et qui a pour coefficient directeur ………. .

Tracer T_5 sur le graphique ci-dessus.

3°) Donner sans explication une équation des tangentes T_1 et T_2.

T_1 : ………………………………. T_2 : ……………………………….

IV. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 3x - 4$.

1°) Calculer le quotient $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour h non nul sous forme simplifiée.

2°) La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Si oui, que vaut $f'(2)$?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de $f'(0)$.

$f'(0) =$ ………..

Corrigé du contrôle du 3-12-2012

Thèmes de ce contrôle :

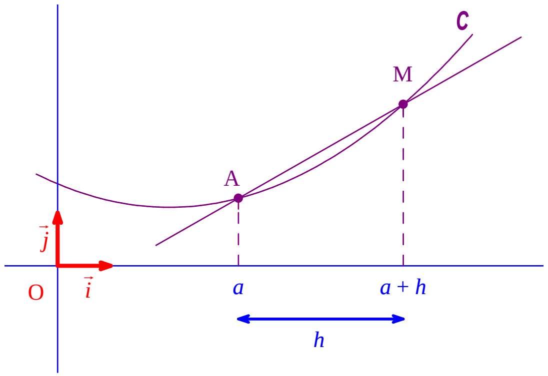
- approche expérimentale de la tangente

- nombre dérivé

→ Cadre graphique

→ Cadre numérique-algébrique

I. Question de cours



Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

II.

Partie A Agrandissements autour d'un point

Cette partie porte sur l'observation.

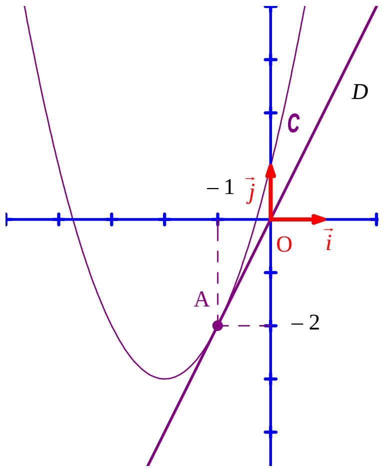
Les zooms successifs correspondent à des changements de fenêtre graphique.

On peut observer que le tracé de $\mathcal{C}$ au voisinage du point A est pratiquement rectiligne.

On peut aussi observer que le tracé de la courbe est continu (c'est-à-dire que la courbe est tracée sans lever le crayon).

Partie B Tangente en un point

1°)



2°) La courbe (l'arc de courbe) peut être assimilé à la tangente (à un segment de tangente) au voisinage du point A.

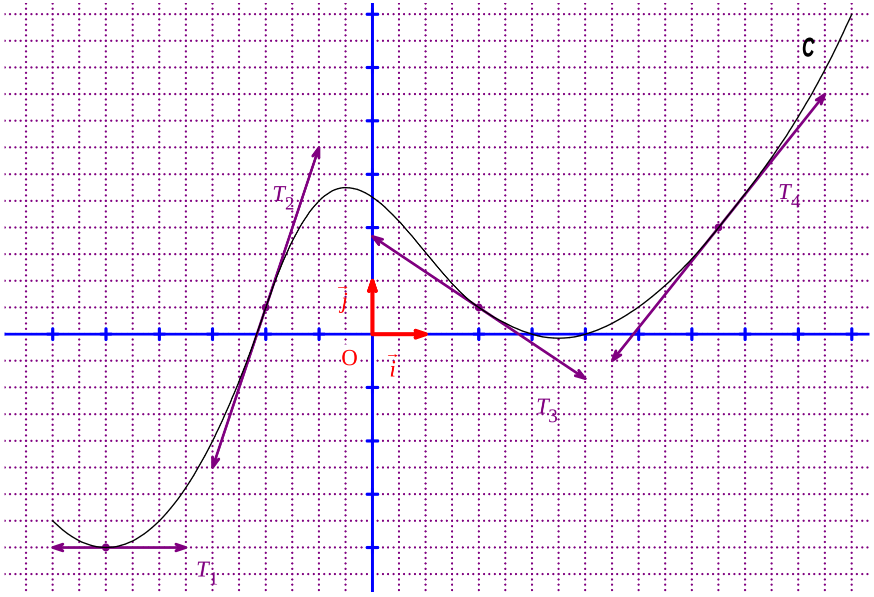
Quelques commentaires :

• Le mot « voisinage » est essentiel (la propriété est vraie localement).

• On évite de dire que $\mathcal{C}$ et D sont confondues au voisinage du point A.
Le mot « confondu » a, en effet, un sens très précis en mathématiques (cf. articles « Confondu », « Distinct » du *Dictionnaire de mathématiques* de Stella Baruk) ; ici, $\mathcal{C}$ et D ont un seul point commun : A.
On ne dit pas que $\mathcal{C}$ et D sont confondus en A.

• On peut remarquer que $\mathcal{C}$ est tout entière au-dessus de D (c'est-à-dire dans le demi-plan fermé de frontière D au-dessus de D). On peut démontrer par le calcul cette propriété graphique.

III.



1°) **Lectures graphiques de nombres dérivés.**

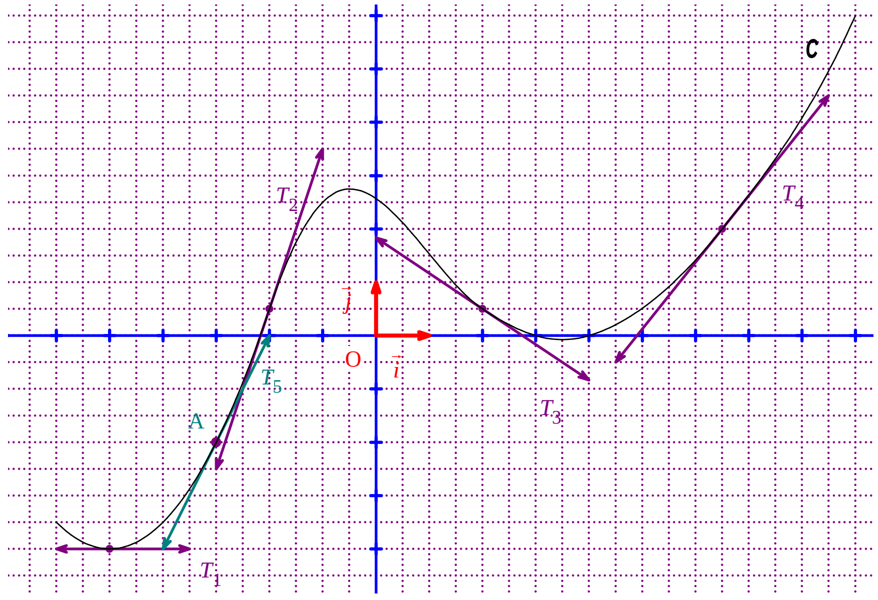
$f\,'(-5) = \mathbf{0}$ $\qquad f\,'(-2) = \mathbf{3}$ $\qquad f\,'(2) = \mathbf{-\frac{2}{3}}$ $\qquad f\,'(6{,}5) = \mathbf{\frac{5}{4}}$

2°) $f\,'(-3) = 2$

T_5 : tangente à **C** au point A d'abscisse – 3

T_5 est la droite qui passe par **A** et qui a pour coefficient directeur **2**.

Tracé de T_5 sur le graphique ci-dessus.



3°) **Équations des tangentes T_1 et T_2.**

T_1 : $\mathbf{y = -4}$ $\qquad T_2$: $\mathbf{y = 3x + \frac{13}{2}}$

• Pour la tangente T_1 :

- soit on lit directement cette équation (car la droite est parallèle à l'axe des abscisses : c'est une tangente horizontale)

- soit on applique la formule donnant l'équation d'une tangente $y = f\,'(-5)(x+5) + f(-5)$.

• Pour la tangente T_2 :

On applique la formule donnant l'équation d'une tangente : $y = f\,'(-2)(x+2) + f(-2)$.

On obtient :

$$y = 3(x+2) + \frac{1}{2}$$

$$y = 3x + 6 + \frac{1}{2}$$

$$y = 3x + \frac{13}{2}$$

On ne pouvait pas lire graphiquement l'équation réduite de cette tangente.
On était obligé d'utiliser la formule.

IV.

$f : x \mapsto -x^2 + 3x - 4$

1°) **Calculons le quotient $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour h non nul sous forme simplifiée.**

$$\begin{aligned} f(2) &= -2^2 + 3\times 2 - 4 \\ &= -4 + 6 - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+h) &= -(2+h)^2 + 3(2+h) - 4 \\ &= -\left(4 + 4h + h^2\right) + 6 + 3h - 4 \\ &= -h^2 - h - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{-h^2 - h - 2 + 2}{h} \\ &= \frac{-h^2 - h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(-h-1)}{\cancel{h}} \\ &= -h - 1 \end{aligned}$$

2°) **Étudions la dérivabilité de f en 2.**

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \to 0} (-h-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Le résultat de la limite est un nombre fini ; on en déduit que la fonction f est dérivable en 2 et $f\,'(2) = 1$.

V. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

Déterminons à l'aide de la calculatrice la valeur de $f\,'(0)$.

$$f\,'(0) = 1$$

Certaines calculatrices affichent : 1,000001.
C'est une approximation. Il ne faut pas tenir compte de la dernière décimale 1.
On peut le démontrer par le calcul (en faisant la limite du taux de variation).