TS Limites de suites (3)

Plan du chapitre :

Une expérience sur calculatrice avec la touche $\boxed{\text{Ans}}$:
On rentre un nombre.

Le 29-11-2022

Cours sur limites de suites (3)

Ce théorème est beaucoup utilisé :
pour les suites définies par des sommes ou des produits
pour les suites définies par récurrence.

Si une suite croissante a pour limite un réel L, alors ce réel L est un majorant.
Idem minorant.

On dit qu'une suite est monotone pour exprimer qu'elle est soit croissante soit décroissante.
On dit qu'une suite est strictement monotone pour exprimer qu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.
Comme pour les fonctions
Différence entre les deux :
Pour une suite strictement croissante, chaque terme est strictement au-dessus du précédent.
Pour une suite strictement décroissante, chaque terme est strictement au-dessous du précédent.
Exemple de suite croissante mais pas strictement croissante :
1, 1, 1, 3, 3, 5, 6, 6 …

Une suite à la fois croissante et décroissante est une suite constante.
La démonstration est très facile.
Même chose que pour les fonctions.

Une suite constante est monotone.

I. Rappels sur les suites majorées, minorées, bornées

1°) Définition 1 (suite majorée, minorée, bornée)

u est une suite.

• On dit que *u* est **majorée** pour exprimer qu'il existe un réel *M* tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$ (*M* est un **majorant** de la suite).

• On dit que *u* est **minorée** pour exprimer qu'il existe un réel *m* tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$ (*m* est un **minorant** de la suite).

• On dit que *u* est **bornée** pour exprimer qu'il existe deux réels *m* et *M* tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

2°) Définition 2 (majorant, minorant)

• Un majorant d'une suite *u* est un réel fixe (indépendant de *n*) tel que tous les termes de la suite soient inférieurs ou égaux à ce réel.

• Un minorant d'une suite *u* est un réel fixe (indépendant de *n*) tel que tous les termes de la suite soient supérieurs ou égaux à ce réel.

3°) Interprétation graphique

• *u* est **majorée** par un réel *M* signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés au-dessous ou sur la droite d'équation $y = M$.

• *u* est **minorée** par un réel *m* signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés au-dessus ou sur la droite d'équation $y = m$.

• *u* est **bornée** par deux réels *m* et *M* signifie que tous les points de sa représentation graphique dans un repère du plan sont situés dans la bande de plan limitée par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.

4°) Exemple

La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (par – 1 et 1).

5°) Propriété

● Si un réel *M* est un majorant d'une suite *u*, alors tous les réels supérieurs ou égaux à *M* sont aussi des majorants de la suite *u*.

● Si un réel *m* est un minorant d'une suite *u*, alors tous les réels inférieurs ou égaux à *m* sont aussi des minorants de la suite *u*.

Cette propriété se démontre très facilement.

Cette propriété justifie l'emploi de l'article indéfini quand on parle de majorant ou de minorant d'une suite.

II. Limites des suites monotones

1°) Propriété

● Si une suite croissante a pour limite le réel L, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L.

● Si une suite décroissante a pour limite le réel L, alors tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à L.

2°) Démonstration

On se place dans le cas d'une suite croissante convergente ; la démonstration est analogue dans le cas d'une suite décroissante convergente.

Considérons une suite croissante (u_n) de limite L.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un terme $u_p > \mathrm{L}$.
Alors par croissance de la suite, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p > \mathrm{L}$.
L'intervalle $\left]\mathrm{L}-1\,;u_p\right[$ contient L mais ne peut contenir des termes u_n que pour $n < p$, donc il ne contiendra pas tous les termes à partir de l'indice *p*.
Ceci contredit le fait que la suite ait pour limite L. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \mathrm{L}$.

3°) Autre formulation

● Si une suite croissante a pour limite le réel L, alors L est un majorant de la suite.

● Si une suite décroissante a pour limite le réel L, alors L est un minorant de la suite.

On notera l'utilisation de l'article indéfini.

Le 28-11-2022

● Si une suite croissante a pour limite un réel L, alors L est un majorant de la suite.

● Si une suite décroissante a pour limite un réel L, alors L est un minorant de la suite.

La réciproque est fausse.

Le 29-11-2022

● Si une suite croissante a pour limite un réel L, alors ce réel L est un majorant de la suite.

● Si une suite décroissante a pour limite un réel L, alors ce réel L est un minorant de la suite.

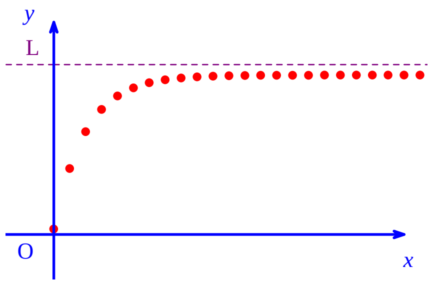
III. Théorèmes de convergence pour les suites monotones

1°) Théorème des suites monotones majorées ou minorées (admis sans démonstration)

***u* est une suite monotone.**

● Si *u* est croissante et majorée, alors elle converge (vers une limite finie).

● Si *u* est décroissante et minorée, alors elle converge (vers une limite finie).



On peut faire le lien avec la notion d'asymptote horizontale déjà vue pour les fonctions en début d'année.

2°) Précision sur la limite d'une suite croissante majorée ou d'une suite décroissante minorée

Grâce à la propriété du paragraphe **II**, on peut dire que :

- la limite d'une suite croissante majorée est <u>un</u> majorant de cette suite ;

- la limite d'une suite décroissante minorée est <u>un</u> minorant de cette suite.

On peut préciser ce majorant ou ce minorant grâce aux résultats suivants qui seront démontrés dans l'enseignement supérieur :

- la limite d'une suite croissante majorée est le plus petit des majorants de la suite

- la limite d'une suite décroissante minorée est le plus grand des minorants de la suite.

3°) Mise en garde

Ce théorème est un théorème d'existence de limite ; il ne permet pas de la trouver.

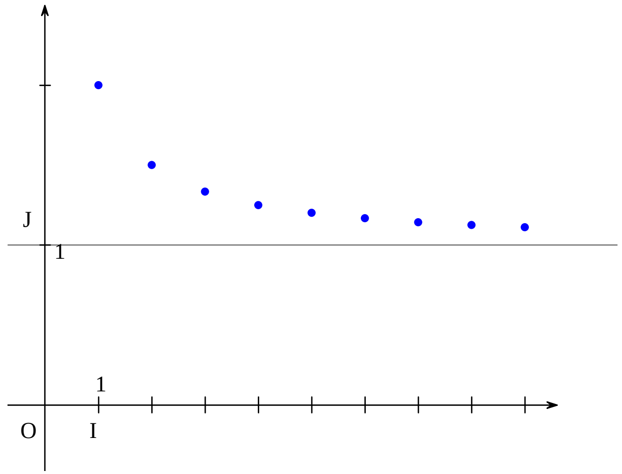
Exemple de raisonnement faux :

Si *u* est une suite décroissante et minorée par 0, alors *u* converge vers 0 (on n'en a aucune certitude).

Exemple :

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$

La suite *u* est décroissante (démonstration très facile : comparaison directe de u_n et u_{n+1} ou différence $u_{n+1} - u_n$).



$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

On peut se référer la représentation graphique de la suite (points isolés).

0 est $\boxed{\text{un}}$ minorant de la suite car tous les termes de la suite sont strictement positifs (il s'agit d'un signe évident).

Pourtant, 0 n'est pas la limite.

Le 2 décembre 2022

Léo Lemaire année scolaire 2022-2023

Métaphore d'une suite croissante et minorée :
La suite décroissante minorée est comme une piste de ski.
Le skieur, arrivé au bas de la piste, ne peut plus descendre.
On peut appliquer cette logique à une suite décroissante minorée qui ne peut pas descendre en dessous de son minorant.

IV. Théorème de divergence pour les suites monotones

1°) Théorème des suites monotones non majorées ou non minorées

***u* est une suite monotone.**

• Si *u* est croissante non majorée, alors *u* diverge vers + ∞.

• Si *u* est décroissante non minorée, alors *u* diverge vers – ∞.

2°) Démonstration

On effectue la démonstration dans un cadre général abstrait : on ne connaît pas le terme général de la suite (u_n).

Hypothèses : $\begin{cases} u \text{ est croissante } (\mathrm{H}_1) \\ u \text{ est non majorée } (\mathrm{H}_2) \end{cases}$

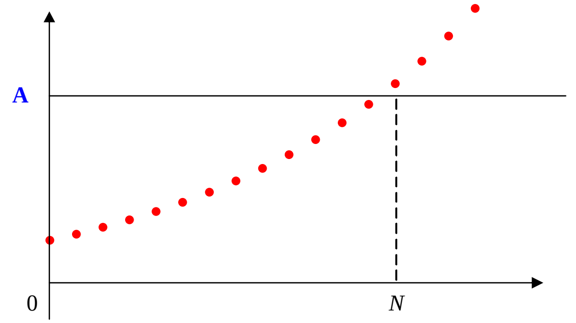
But : Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration avec la définition :

On utilise la définition D_1 du chapitre précédent.
Il faut démontrer que tout intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

On pose $\mathrm{I} = [\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$.
D'après (H_2), A n'est pas un majorant de *u*.
A majorant signifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \mathrm{A}$.

Par négation, il existe donc un entier naturel *N* tel que $u_N > \mathrm{A} \quad (1)$.



Or d'après (H_1), u est croissante.
Donc si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant u_N$ (2).

(1) et (2) donnent : si $n \geqslant N$, alors $u_n > \mathrm{A}$ ou encore si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

V. Bilan sur la limite d'une suite monotone

En reprenant les résultats des paragraphes **III** et **IV**, on peut résumer ainsi :

Une suite croissante est
- **soit convergente (si elle est majorée)**
- **soit divergente vers + ∞ (si elle n'est pas majorée)**

Une suite décroissante est
- **soit convergente (si elle est minorée)**
- **soit divergente vers – ∞ (si elle n'est pas minorée)**

Rappel :

Un majorant ou un minorant est un réel (donc a une valeur finie).

VI. Détermination de la limite d'une suite récurrente ; égalités de limites

1°) Une situation fréquente

u est une suite définie par récurrence.
On suppose que u converge (par exemple, on a démontré que u est croissante majorée ou décroissante minorée).
On cherche sa limite.

2°) Exemple

u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

On ne cherche pas ici l'expression du terme général en fonction de n.

On démontre facilement par récurrence (à faire en exercice) que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$

La suite u possède donc deux propriétés fondamentales.

u est décroissante minorée donc elle converge.

On note ℓ sa limite.

Déterminons ℓ.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ (propriété donnée dans un chapitre précédent, évidente d'après la définition d'une suite qui converge vers un réel)

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} \ell \\ \dfrac{1}{2}\ell + 1 \quad \left(\text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1\right) \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + 1$.

Donc $\ell = 2$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

On dit que l'égalité est obtenue par « passage à la limite » dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

On parle d'égalité de limites.

3°) Résultat général sur les suites récurrentes

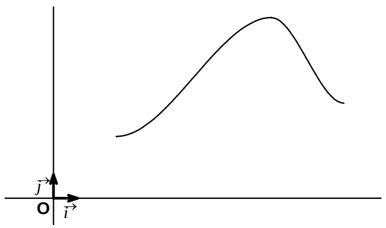
f est une fonction définie sur un intervalle I tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ (autrement dit, I est un intervalle stable par f).

u est une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

La condition de stabilité de I par f assure que la suite u est définie sur $\mathbb{N}$.

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad (\mathrm{H}_1) \\ \ell \in \mathrm{I} \quad (\mathrm{H}_2) \\ f \text{ est continue sur I} \quad (\mathrm{H}_3) \end{array}\right\}$, alors $\ell = f(\ell)$.

On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle est une fonction dont la représentation graphique peut être tracée sans lever le crayon (définition naïve, qui sera précisée plus tard dans un chapitre spécial du cours).



Lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, la condition de stabilité n'a pas lieu d'être.

La condition (H_3) peut être remplacée par f est continue en ℓ.

Ce théorème se démontre grâce à la propriété sur l'image d'une suite convergente par une fonction continue.

La condition (H_1) exprime que u est convergente.

On dit parfois que ℓ est un « point fixe » de la fonction f pour exprimer que $\ell = f(\ell)$.

Dans l'exemple du paragraphe précédent, $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$.

Cette fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction affine).

La limite ℓ de la suite u vérifie l'égalité $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$.

VII. Étude d'une suite du type $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$

• Pour conjecturer son comportement

On utilise la représentation graphique de type « web » de la suite sur une calculatrice ou un logiciel.

• Pour démontrer qu'elle converge

Quand f est croissante, on démontre souvent par récurrence, que la suite est croissante-majorée, ou décroissante-minorée.

• Pour déterminer sa limite L, si elle converge, on cherche la limite de $f(u_n)$ par théorèmes d'opérations et on exprime qu'elle doit être égale à L.

On arrive ainsi souvent au fait que L vérifie $f(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$. Graphiquement, L est alors l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ : $y = x$.

• Pour déterminer le premier indice n tel que $|u_n - \mathrm{L}| < \varepsilon$ (où ε est un réel strictement positif), on peut réaliser un programme Python avec une boucle « Tantque » (algorithme de seuil).
Nous verrons des exemples en exercices.

VIII. Appendice : unicité de la limite d'une suite convergente

1°) Propriété

Si une suite converge, sa limite est unique.

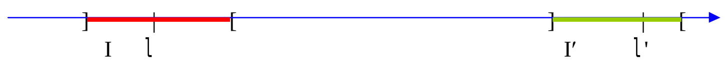
2°) Démonstration

On considère une suite u telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (H_1) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell'$ (H_2).

Avec la définition donnée, on va démontrer que $\ell = \ell'$.

On raisonne par l'absurde : on suppose que $\ell \neq \ell'$.

On choisit un intervalle ouvert I contenant ℓ et un intervalle ouvert I′ contenant ℓ' tels que $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}' = \varnothing$ $\quad (\mathrm{H}_3)$.



Pour la figure, on suppose que $\ell < \ell'$.

D'après (H_1), comme I est un intervalle ouvert contenant ℓ, on peut trouver un entier naturel N_1 tel que si $n \geqslant N_1$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

D'après (H_2), comme I′ est un intervalle ouvert contenant ℓ', on peut trouver un entier naturel N_2 tel que si $n \geqslant N_2$, alors $u_n \in \mathrm{I}'$.

Exemple :

$N_1 = 1000$ donc u_{1000}, u_{1001}, u_{1002} … sont dans I.
$N_2 = 1500$ donc u_{1500}, u_{1501}, u_{1502} … sont dans I′.

On note N le plus grand des entiers N_1 et N_2.

Si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ et $u_n \in \mathrm{I}'$.
Impossible car $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}' = \varnothing$ d'après (H_3).

C'est ce qu'on appelle **l'unicité de la limite** c'est-à-dire lorsqu'une suite admet une limite finie, celle-ci est unique.
On dit que c'est « la » limite de la suite.

Cette démonstration est un exemple d'utilisation (de mise en œuvre) de la définition d'une suite convergente.

Le 2 décembre 2022

Résumé à écrire sur une feuille en grand format A4 sens paysage

suite $\uparrow$

+ $\Rightarrow$ **CV**

majorée

2 propriétés