TS

Limites de suites (2)

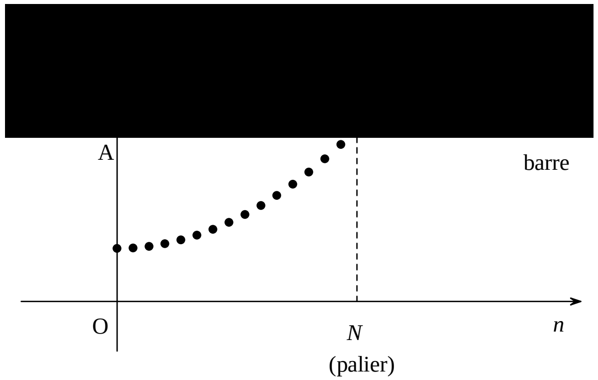
Objectifs : mettre en place et utiliser des définitions rigoureuses des limites de suites

Plan du chapitre :

I. Approche de la définition d'une suite divergeant vers + ∞

1°) Approche graphique

On a représenté graphiquement ci-dessous une suite (u_n) qui tend vers + ∞.

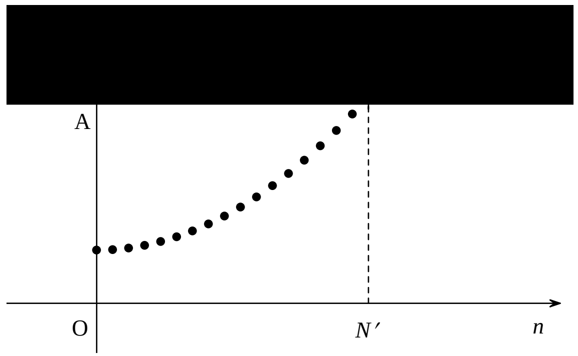


« u_n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pourvu que n soit assez grand »

① Si on place une **barre** (ou **seuil**) à une valeur A (exemple : $\text{A} = 2021$)

Il existe un **palier** N (valeur seuil) tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant \text{A}$ ($\Leftrightarrow u_n \in [\text{A} ; +\infty[$).

② Si on déplace la barre



N change car ça tend vers + ∞ (Si on bouge l'un, on bouge l'autre.)
On va donner cette définition de « $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ » : $\forall \text{A} \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant \text{A}$.

« Quel que soit le réel A, il existe au moins un entier naturel N (qui dépend de A) tel que $n \geqslant N$ implique $u_n \geqslant \text{A}$ ».

Le N dépend de A.

2°) Approche numérique (étude d'un exemple avec des chiffres)

$u_n = n^2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$u_n \geqslant 2021$ pour $n \geqslant \sqrt{2021}$ (visualisation graphique)

$\sqrt{2021} = 44{,}95553358...$

Donc si $n \geqslant 45$, alors $u_n \geqslant 2021$.

3°) Une image pour comprendre

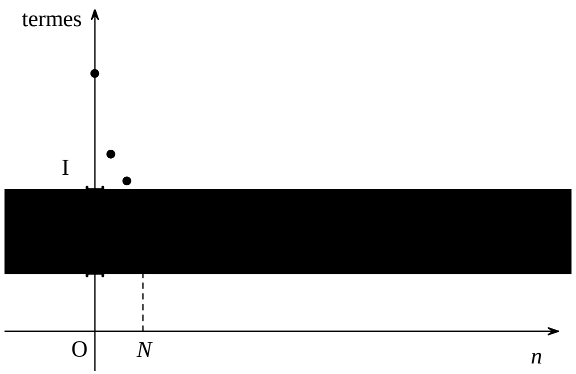
Si on place un capital de 1 € sur un compte en banque à un taux non nul et que l'on vit éternellement, un jour on deviendra millionnaire, milliardaire etc.
Il faudra peut-être attendre 10 000 ans, 100 000 ans…

II. Approche de la définition d'une suite qui converge

1°) Approche graphique

On a représenté graphiquement ci-dessous une suite (u_n) qui tend vers un réel ℓ.

u_n se rapproche de ℓ sans forcément être égal à ℓ (notion de « tendre vers »).



palier
première valeur de *n* à partir de laquelle la « courbe » passe dans le tuyau

Plutôt que de « palier », on peut parler de « seuil ».

« (u_n) prend des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut pourvu que *n* soit assez grand »

① Si on place un tuyau (c'est-à-dire un intervalle ouvert I contenant ℓ)
Il existe un palier N / si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \text{I}$.
Les valeurs ne sortent plus.
On veut enfermer les valeurs dans un « tube », dans un « tuyau » à partir d'un certain indice d'où ils ne sortent plus.

② Si on rétrécit le tuyau c'est-à-dire si on prend un intervalle ouvert $\text{I}' \subset \text{I}$ contenant ℓ, N change.
On notera que l'intervalle I n'a pas à être centré sur ℓ.

2°) Approche numérique (étude d'un exemple avec des chiffres)

$u_n = \dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$\text{I} = \left]-0{,}01\,;\,0{,}01\right[$ (intervalle ouvert qui contient 0)

Si $n > 100$, alors $u_n \in \text{I}$.

le palier (pas tout à fait, le palier est plutôt 101)

3°) Une image pour illustrer

Le capital d'une personne diminue de 1 % par an.

III. Définitions

1°) Définitions des limites au programme à savoir par cœur
à savoir expliquer avec des mots

(u_n) est une suite.

		Définition mathématique sous forme de phrase quantifiée
D_1	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	On dit que la limite de (u_n) est égale à $+\infty$ pour exprimer que <u>tout</u> intervalle I de la forme $[A\,;+\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.
D_2	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	On dit que la limite de (u_n) est égale à $-\infty$ pour exprimer que <u>tout</u> intervalle I de la forme $]-\infty\,;A]$ $(A \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.
D_3	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$	On dit que la limite de (u_n) est égale à ℓ pour exprimer que <u>tout</u> intervalle **<u>ouvert</u>** I contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

Il s'agit de définitions formelles, pas forcément utiles en pratique.

2°) Rappel du chapitre précédent : définition d'une suite convergente – d'une suite divergente

Suite convergente	Suite qui admet une limite finie
Suite divergente	Suite qui n'admet pas une limite finie

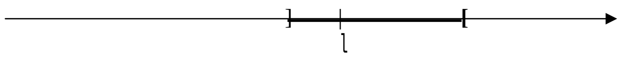
Emploi du vocabulaire

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $-\infty$.

3°) Intervalles et suites

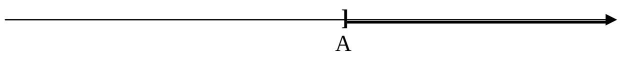
Utilisation de la représentation des termes sur un axe.

• Cas d'une suite convergente vers un réel ℓ



Intervalle que l'on rétrécit autour de ℓ.

• Cas d'une suite divergente vers $+\infty$



Intervalle dont la borne de gauche A devient de plus en plus grande.

IV. Utilisation des définitions

Définitions D_1, D_2, D_3

Démontrer qu'une suite tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel. (théoriquement)

Démontrer qu'une suite ne tend pas vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel.

Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

Démontrer des propriétés des suites (cette année, pour nous, le théorème des gendarmes et son extension).

Les définitions permettent de démontrer les résultats sur les limites des suites de référence $\left(\sqrt{n}\right)$, (n), $\left(n^2\right)$, $\left(n^2\right)$ … et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ … énoncées dans le chapitre précédent.

V. Autre définition équivalente pour les suites convergentes

1°) Approche intuitive

Autre point de vue (plus naturel)

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ signifie que u_n se rapproche de ℓ sans pour autant être (forcément) égal à ℓ quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Autrement dit, la distance entre u_n et ℓ devient très petite ou plutôt aussi petite que l'on veut pour n assez grand.

2°) Définition (hors programme)

On dit que la suite (u_n) tend vers ℓ pour exprimer qu'elle vérifie la propriété :

pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $\mathrm{d}(u_n\,;\ell) < \varepsilon$.

3°) Rappels sur la valeur absolue

- **La distance de deux réels x et y est donnée par la formule $\mathrm{d}(x\,;y) = |x-y| = |y-x|$.**
- **(Exemple :** $\mathrm{d}(u_n\,;\ell) = |u_n - \ell|$)

- $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$

(Exemple : $|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$)

On peut reformuler la définition avec une valeur absolue :

(u_n) tend vers ℓ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

4°) Utilisation

- Nous n'utiliserons pas cette définition cette année.

- Mais cette définition permet de démontrer dans le supérieur des propriétés des limites avec les propriétés des inégalités (majorer, minorer) et des valeurs absolues. On peut donc dire que cette définition est opérationnelle.

VI. Lien entre limites de fonctions et limites de suites

Propriété fondamentale (admise sans démonstration)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Exemples d'application directe :

On utilise deux limites de référence des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

$$\mathrm{e}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\ln n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

VII. Limites et comparaisons

1°) Théorème des gendarmes ou d'encadrement

***u*, *v*, *w* sont trois suites vérifiant les trois conditions suivantes C_1, C_2, C_3 :**

C_1 : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

les « gendarmes »

C_2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$

C_3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ **(même limite que pour (u_n))**

Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Attention, c'est le même l partout bien évidemment !

Version un peu plus détaillée qui permet de comprendre :

u, *v*, *w* sont trois suites vérifiant les trois conditions suivantes :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l' \quad (l' \in \mathbb{R})$

- Si $l = l'$, alors on peut dire que (v_n) converge vers l.
- Si $l \neq l'$, alors on ne peut rien dire sur la convergence de (v_n).

Il faut faire très attention à toutes les informations.

Ce théorème fournit un nouveau moyen puissant dans certains cas de trouver une limite de suite par encadrement.

1 On cherche un encadrement du terme général par deux suites.
2. On calcule les limites des deux suites qui encadrent et on montre qu'elles sont égales.
3. On conclut.

2°) Démonstration du théorème des gendarmes

• Hypothèses :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad (\mathrm{H}_1)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \quad (\mathrm{H}_2)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \quad (\mathrm{H}_3)$

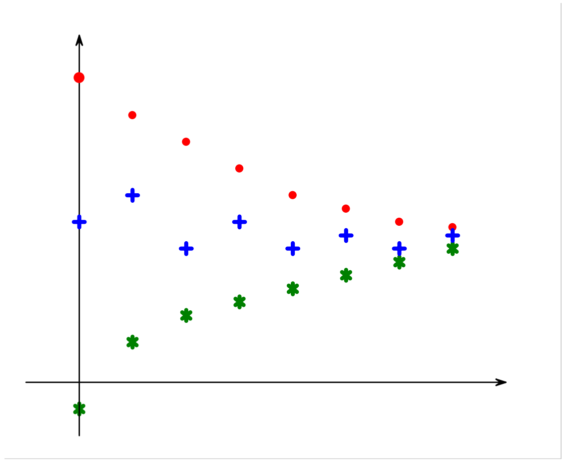
• But :

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

• Démonstration avec la définition D_3 :

On choisit un intervalle ouvert I contenant l quelconque (I est un intervalle sur l'axe des ordonnées).

On choisit un intervalle indépendant des suites.



D'après (H_2), comme I est un intervalle ouvert contenant ℓ, on peut trouver un entier naturel N_1 tel que si $n \geqslant N_1$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ (en utilisant la définition D_3**)**.
(N_1 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans I)

D'après (H_3), comme I est un intervalle ouvert contenant ℓ, on peut trouver un entier naturel N_2 tel que si $n \geqslant N_2$, alors $w_n \in \mathrm{I}$ (en utilisant la définition D_3**)**.

On note N le plus grand des entiers N_1 et N_2.

Exemple pour comprendre ce qui se passe :

On suppose que $N_1 = 1000$ et que $N_2 = 1500$.

Comme N_1 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans I (ou « rentrent dans I »), on peut dire que u_{1000}, u_{1001}, u_{1002} … sont dans I.

Comme N_2 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite w sont dans I (ou « rentrent dans I »), on peut dire que w_{1500}, w_{1501}, w_{1502} … sont dans I.

Si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ et $w_n \in \mathrm{I}$.
Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ donc si $n \geqslant N$, alors $v_n \in \mathrm{I}$.
Comme ceci est vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, en utilisant la définition D_3, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

On utilise implicitement la propriété suivante :

I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
Pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, si $a \leqslant x \leqslant b$, alors $x \in \mathrm{I}$.

3°) Extension du théorème des gendarmes ou « théorème d'un seul gendarme »

***u* et *v* sont deux suites.**

• **Si** $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{array}\right\}$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

(« être plus grand que + ∞ »)

• **Si** $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\}$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

(« être moins grand que – ∞ »)

Ce théorème fournit un nouveau moyen de trouver une limite de suite.

4°) Démonstration de l'extension du théorème des gendarmes ou « théorème d'un seul gendarme »

On va utiliser la définition D_1.

• **Hypothèses :**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \qquad (\mathrm{H}_1)$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \qquad (\mathrm{H}_2)$

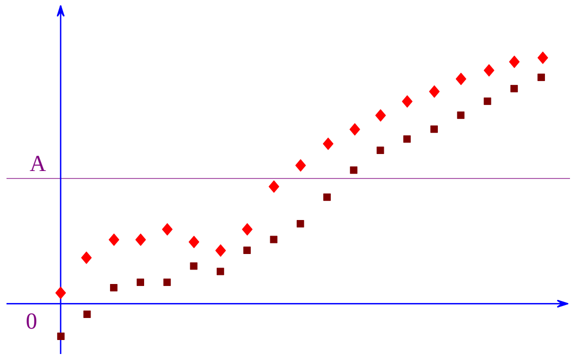
• **But :**

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

• **Démonstration avec la définition D_1 :**

(Il faut démontrer que <u>tout</u> intervalle I de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.)

On pose $\mathrm{I} = [\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$.
D'après (H_2), on peut trouver un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.
D'après (H_1), on peut écrire : si $n \geqslant N$, alors $v_n \in \mathrm{I}$.
Comme ceci est vrai pour tout intervalle I de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$, on en déduit, d'après la définition D_1, que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.



5°) Exemples

● **Exemple 1**

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \dfrac{2+\sin n}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Analyse :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

sin n n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$ (on peut le démontrer rigoureusement ; nous admettons ici ce résultat assez intuitif).

On ne peut donc pas déterminer la suite en utilisant la règle sur la limite du quotient de deux suites.

Méthode :

On procède par encadrement.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{aligned} -1 \leqslant \sin n \leqslant 1 & \qquad +2 \\ 1 \leqslant 2+\sin n \leqslant 3 & \\ \underbrace{\frac{1}{n}}_{u_n} \leqslant \frac{2+\sin n}{n} \leqslant \underbrace{\frac{3}{n}}_{w_n} & \qquad : n \ (n>0) \end{aligned}$$

On pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $w_n = \dfrac{3}{n}$.

$$\left.\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ &\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ &\lim_{n \to +\infty} w_n = 0 \end{aligned}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

● **Exemple 2**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n!$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! = n \times (n-1)!$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n-1)! \geqslant 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! \geqslant n$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc d'après le théorème « d'un seul gendarme », $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On retiendra $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty}$.

On pourra utiliser ce résultat directement en exercice sans refaire la démonstration.

6°) Point-méthode

● Une nouvelle manière de trouver la limite d'une suite

● Penser aux théorèmes de comparaison quand on a des cosinus, des sinus, $(-1)^n$.

● Il existe une version du théorème des gendarmes et de son extension pour les fonctions.

VIII. Démonstration de la limite q^n lorsque n tend vers $+\infty$ (q réel fixé)

1°) Examen des cas particuliers

● $q = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q^n = 0$

(**N.B. :** on prend n dans $\mathbb{N}^*$ car 0^0 n'existe pas.)

La suite (q^n) est constante donc elle est convergente ($\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$).

● $q = 1$

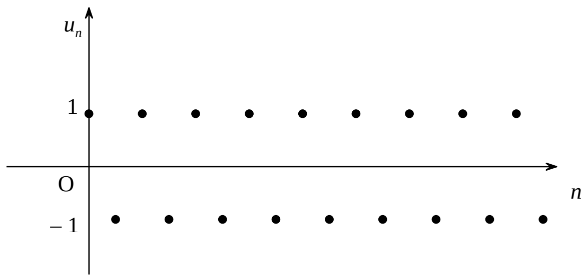
$\forall n \in \mathbb{N} \quad q^n = 1$

La suite (q^n) est constante donc elle est convergente ($\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$).

• $\underline{q=-1}$

$$q^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite $\left(q^n\right)$ n'a pas de limite donc elle est divergente.



(Une suite ne peut admettre deux limites.)

2°) Cas général

• $\underline{q>1}$

On cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

Astuce de départ :

On pose $h=q-1$.

On a : $h>0$ et $q=1+h$.

$$q^n=(1+h)^n=\underbrace{(1+h)(1+h)...(1+h)}_{n \text{ facteurs}}=1+nh+\underbrace{...}_{\text{facteurs tous positifs ou nuls}}+h^n$$

On a donc $q^n \geqslant nh$ car $q^n-nh=1+\underbrace{...}_{\text{termes positifs ou nuls}}+h^n$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N} \quad q^n \geqslant nh \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(nh)=+\infty \ \ (\text{car } h>0) \end{array}\right\} \text{donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty.$$

• $\underline{0<|q|<1}$

$(-1<q<0$ ou $0<q<1)$

Dans ce cas, $\dfrac{1}{|q|}>1$.

On pose $q'=\dfrac{1}{|q|}$.

$q'>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(q')^n=+\infty$ (cas précédent).

Or $\left|q^n\right|=|q|^n=\left(\dfrac{1}{q'}\right)^n=\dfrac{1}{(q')^n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|q^n\right|=0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

• $\underline{q<-1}$

Alors $-q>1$ soit $|q|>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|q|^n=+\infty$.

Or q est négatif dons le signe de q^n sera positif ou négatif <u>suivant la parité de *n*</u>.
Les termes sont alternativement positifs ou négatifs, de plus en plus grands en valeur absolue.

La suite $\left(q^n\right)$ n'a pas de limite. Elle est divergente.