1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 23 novembre 2012

Vérifier que l'on a :

$1\times 2\times 3\times 4+1=5^2$;

$2\times 3\times 4\times 5+1=11^2$

$3\times 4\times 5\times 6+1=19^2$.

Qu'y a-t-il de remarquable ?

En est-il toujours ainsi ?

On pourra utiliser un logiciel de calcul formel.

Corrigé

Observation :

Toutes les expressions sont de la forme $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que dans les 3 cas le résultat est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier naturel).

D'autres essais montreraient que le résultat est encore valable pour d'autres valeurs de *n*.

Les résultats permettent donc de penser que « le produit de quatre entiers naturels consécutifs augmenté de 1 est toujours un carré parfait. »

On peut observer quelque chose d'autres sur les trois premières égalités : les expressions sont les carrés de nombres premiers (c'est-à dire de nombres entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).
C'est un résultat intéressant, certes, mais qui ne se vérifie pas pour d'autres valeurs de *n*.

Démonstration : passage à l'algèbre

On s'intéresse à une expression de la forme $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Avec le logiciel XCas, on cherche la simplification de l'expression $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$.

Syntaxe : simpl(sqrt(x * (x + 1) * (x + 2) * (x + 3) + 1)).

On obtient $\left| x^2+3x+1 \right|$.

Le résultat obtenu signifie que l'on a : $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = \left| x^2+3x+1 \right|$.

On peut donc écrire que : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = \left| x^2+3x+1 \right|^2$ soit

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = \left(x^2+3x+1\right)^2$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \left(n^2+3n+1\right)^2$.

Or $n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$

On en déduit que pour tout entier naturel *n*, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est le carré d'un entier naturel.

L'usage d'un LCF n'est pas indispensable : le développement fait apparaître des exposants 4 donc cela reste facile.

Autre façon : sans logiciel de calcul formel

On observe que la formule $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$ semble vraie pour les premières valeurs de *n*.

On veut démontrer qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de *n*.

Afin d'éviter les gros calculs qui consisteraient à développer membre de gauche et membre de droite, je suggère de démontrer que $(n^2+3n+1)^2-1=n(n+1)(n+2)(n+3)$ ce qui est assez simple en utilisant l'identité remarquable a^2-b^2.

$$\begin{aligned}(n^2+3n+1)^2-1&=\left[(n^2+3n+1)-1\right]\left[(n^2+3n+1)+1\right]\\&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)\\&=n(n+3)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$