TS Exercices sur les limites de suites (2)

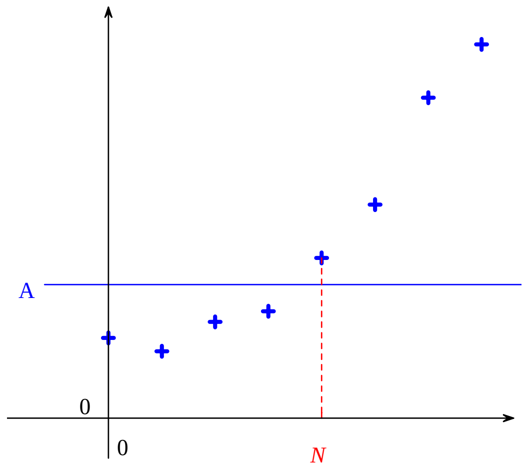
$\boxed{1}$ Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire sous la forme d'une phrase quantifiée la propriété « (u_n) converge vers 3 ».

$\boxed{2}$ On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire en termes de limites lorsque c'est possible les propositions suivantes :
1°) tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite pour n assez grand.
2°) l'intervalle $\left]-5{,}01\,;-4{,}99\right[$ contient tous les termes d'indice $n \geqslant 1000$.
3°) tout intervalle de la forme $\left]-\infty\,;\mathrm{A}\right]$ (où A est un réel) contient tous les termes de la suite pour n assez grand.
On commencera par recopier les phrases.

Les exercices $\boxed{3}$ à $\boxed{5}$ sont des déterminations de seuils avec des exemples numériques comme l'illustre le graphique ci-dessous dans le cas d'une suite qui diverge vers $+\infty$.



$\boxed{3}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]10^6\,;+\infty\right[$.

$\boxed{4}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$.

$\boxed{5}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

Déterminer les entiers naturels n tels que $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01]$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01] \Leftrightarrow |u_n - 2| \leqslant 0{,}01$.
(Revoir la caractérisation d'un intervalle fermé borné par centre et rayon à l'aide de la valeur absolue).

$\boxed{6}$ Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n).

1°) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$; 2°) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{3^n}$.

$\boxed{7}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

$\boxed{8}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin n$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Donner une expression simplifiée de S_n sous forme factorisée ; en déduire la limite de la suite (S_n).

$\boxed{10}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2n}\right)$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

$\boxed{11}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$\boxed{12}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 2011$.

$\boxed{13}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

Soit A un réel strictement positif fixé.
On cherche un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant \mathrm{A}$.
Parmi les propositions suivantes indiquer celle qui convient :

- ☐ $N = \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right)$
- ☐ $N = \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right) + 1$
- ☐ $N = \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right) - 1$

Rappel de notation :

Pour tout réel x, $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
On a $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

$\boxed{14}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

$\boxed{15}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1°) La suite (u_n) est-elle monotone ?

2°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3°) Déterminer le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$.

$\boxed{16}$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel *n*, on ait $u_n \leqslant v_n$.

Dans la colonne de gauche, on donne une limite ; compléter l'égalité de limite *lorsque c'est possible*. Ne rien écrire dans la case lorsque ce n'est pas possible.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = ...$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = ...$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = ...$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$

$\boxed{17}$ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$.

1°) La suite (u_n) est-elle monotone ?

2°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Résumé du cours

	Hypothèses	Conclusion	Commentaire
Théorème des gendarmes	$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$	$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$	$\ell \in \mathbb{R}$
Extension du théorème des gendarmes	$u_n \leqslant v_n$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $u_n \leqslant v_n$ $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$	$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$	

Corrigé

1

On dit que la suite (u_n) converge vers 3 pour exprimer que tout intervalle ouvert I contenant 3 contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

Le lundi 29 novembre 2021

Une phrase quantifiée est une phrase avec des expressions de quantifications.
Il y a 2 expressions de quantification :
- « pour tout », « quel que soit »
- « il existe … tel que …»

ici phrase sans symbole

2

1°) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

2°) On ne peut rien dire.

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Déterminons un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]10^6 \,;+\infty\right[$.

$u_n > 10^6 \quad (1)$

1ère façon : en utilisant la racine cubique d'un réel

$\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^6$

$\Leftrightarrow n^2 \times n > \left(10^6\right)^2$ (on élève au carré les deux membres ; les deux membres sont positifs ou nuls donc il y a bien équivalence)

$\Leftrightarrow n^3 > \left(10^6\right)^2$

$\Leftrightarrow n^3 > 10^{12}$

$\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{10^{12}}$ *

$\Leftrightarrow n > 10^4$

2e façon : sans utiliser la racine cubique d'un réel

$\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^6$

$\Leftrightarrow n^2 \times n > \left(10^6\right)^2$

$\Leftrightarrow n^3 > \left(10^6\right)^2$

$\Leftrightarrow n^3 > 10^{12}$

$\Leftrightarrow n^3 > \left(10^4\right)^3$

$\Leftrightarrow n > 10^4$ (car la fonction « cube » est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc en posant $N = 10^4$, si $n > N$, alors $u_n \in \left]10^6 \,;+\infty\right[$ (autrement dit si $n > 10^4$, alors $u_n \in \left]10^6 \,;+\infty\right[$).

On peut vérifier la résolution de l'inéquation avec dcode.

On peut noter que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^{\frac{3}{2}}$ puisque $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$.
Avec cette écriture, on peut résoudre différemment l'exercice.

Quelques rappels sur la racine cubique d'un réel :

Pour tout réel a positif ou nul (en fait on pourrait prendre a réel*), il existe un unique nombre réel x tel que $x^3 = a$.
Ce réel x est appelé la racine cubique de a et est notée $\sqrt[3]{a}$.

La racine cubique d'un nombre peut se calculer à l'aide de la calculatrice en utilisant un exposant fractionnaire en utilisant l'égalité qui sera justifiée plus tard : $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ lorsque $a > 0$.

Les propriétés algébrique de la racine cubique sont les mêmes que celles de la racine carrée.

On démontre que la fonction « racine cubique » est strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
La fonction « racine cubique » est la bijection réciproque de la fonction « cube » de $\left[0\,;+\infty\right[$ dans $\left[0\,;+\infty\right[$.

* Pour la racine cubique, on pourrait travailler sur $\mathbb{R}$ (cf. courbe) mais usuellement, au lycée, on travaille plutôt sur $\mathbb{R}_+$.

Quelques notes (lundi 29-11-2021) :

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{10^{12}} = \left(10^{12}\right)^{\frac{1}{3}} = 10^4$

On peut résoudre avec le site dcode.

4

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

$\left.\begin{array}{l} n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $n\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Par limite d'un inverse (tableau des quotients), on en déduit que $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ soit $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Rappel :

Soit a un réel strictement positif.
On a : $\lvert X \rvert < a \Leftrightarrow -a < X < a$.

La valeur absolue perme de traiter les deux inégalités en même temps.

$u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[\Leftrightarrow -10^{-3} < u_n < 10^{-3}$

$\Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$

$\Leftrightarrow u_n < 10^{-3}$ $\quad |u_n| = u_n$ car $u_n > 0$ (on a $n > 0$ donc $n\sqrt{n} > 0$)

La valeur absolue d'un réel positif ou nul est égal à lui-même.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

$\Leftrightarrow n\sqrt{n} > 10^3$ (passage à l'inverse, les deux membres sont strictement positifs)

$\Leftrightarrow n^3 > 10^6$

$\Leftrightarrow n^3 > \left(10^2\right)^3$

$\Leftrightarrow n > 10^2$

Donc en posant $N = 10^2$, si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$ (autrement dit, si $n > 10^2$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$).

On peut vérifier la résolution de l'inéquation avec dcode.

Quelques notes (lundi 29-11-2021) :

$n\sqrt{n} = n \times n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$

passage à l'inverse : $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (a et b étant deux réels strictement positifs)

$\boxed{5}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ (assez évident par les opérations sur les limites)

On cherche les entiers naturels n non nuls que $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01]$ (1).

1ère méthode :

$(1) \Leftrightarrow 1{,}99 \leqslant u_n \leqslant 2{,}01$

$\Leftrightarrow 1{,}99 \leqslant 2 + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2{,}01$

$\Leftrightarrow \underbrace{-0{,}01 \leqslant \dfrac{1}{n^2}}_{\text{toujours vrai car } \frac{1}{n^2} \text{ est forcément positif}} \leqslant 0{,}01$

$\dfrac{1}{n^2}$ est positif donc l'inégalité $\dfrac{1}{n^2} \geqslant -0{,}01$ est toujours vérifiée (un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif). On laisse donc tomber l'inégalité de gauche.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow n^2 \geqslant \dfrac{1}{0{,}01}$ (le signe change par passage à l'inverse ; propriété sur les inégalités : lorsque a et b sont des réels strictement positifs, $a \leqslant b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$)

$\Leftrightarrow n^2 \geqslant 100$

$\Leftrightarrow n \geqslant \sqrt{100}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geqslant 0$)

$\Leftrightarrow n \geqslant 10$

2e méthode :

$(1) \Leftrightarrow 1{,}99 \leqslant u_n \leqslant 2{,}01$

$\Leftrightarrow 2 - 0{,}01 \leqslant u_n \leqslant 2 + 0{,}01$

$\Leftrightarrow -0{,}01 \leqslant u_n - 2 \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow |u_n - 2| \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow \left|2 + \dfrac{1}{n^2} - 2\right| \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n^2}\right| \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} \leqslant 0{,}01$ (car $n^2 > 0$)

$\Leftrightarrow n^2 \geqslant \dfrac{1}{0{,}01}$

$\Leftrightarrow n^2 \geqslant 100$

$\Leftrightarrow n \geqslant \sqrt{100}$

$\Leftrightarrow n \geqslant 10$

Conclusion :

Les entiers naturels n tels que $u_n \in [1{,}99\,;2{,}01]$ sont tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 10.

On peut vérifier la résolution de l'inéquation avec dcode.

On pourrait écrire n^{-2} à la place de $\frac{1}{n^2}$.

Le lundi 29-11-2021

$\boxed{5}$

intervalle borné
ouvert ou fermé
centre : moyenne des extrémités
rayon : différence des extrémités

$\mathbb{R} \rightarrow$ pas de centre

Pascal : « Dieu est une sphère infinie dont le centre est partout et la circonférence… »

Citation à apprendre

$\boxed{6}$

On a une F. I. dans chaque cas (pas tout à fait dans le 1er cas).
On transforme chaque expression.

1°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$

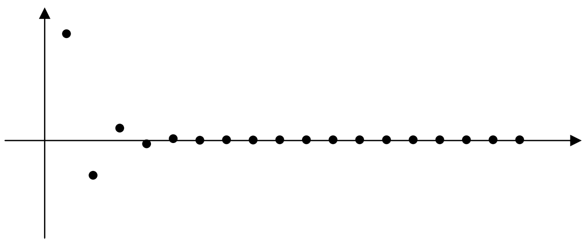
Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.
Il ne s'agit pas ici à proprement parle de forme indéterminée.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ (on utilise la propriété $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ pour a et b réels avec b non nuls)

Or $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On peut observer que la suite (u_n) a un comportement oscillant : les termes d'indice pair sont tous positifs et les termes d'indice impair sont tous négatifs. On a la représentation graphique suivante :



On a bien 0 comme limite, mais on ne dit pas 0^+ ou 0^-.

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n}$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} + \frac{4^n}{3^n} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Or $\frac{4}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$.
Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{7}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n}$.

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on rencontre une forme du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On peut factoriser le numérateur par 4^n et le dénominateur par 3^n (en forçant chaque fois la factorisation).
Ou
On peut aussi factoriser le numérateur et le dénominateur par 3^n (car 3^n est en commun dans les deux).
C'est ce que nous allons faire ici.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n\left(1 + \frac{4^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n\right] = +\infty \quad \text{car } \frac{4}{3} > 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 \quad \text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Méthode :
On met en facteur les termes prépondérants (c'est-à-dire les termes qui tendent le plus vite vers $+\infty$) au numérateur et au dénominateur (pour les suites, on lève les formes indéterminées de la même manière que pour les fonctions).

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes)

Solution détaillée :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin n$

On admet que les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ n'admettent pas de limite.
La démonstration dépasse le cadre de la terminale.
Pour tout réel x qui n'est pas On admet que les suites $(\cos nx)$ et $(\sin n)$ n'admettent pas de limite.
La démonstration dépasse le cadre de la terminale.

La suite $(\sin n)$ n'admet pas de limite donc pour déterminer la limite de la suite (u_n), on procède par comparaison (en utilisant le théorème des gendarmes).

On peut utiliser la calculatrice pour avoir une idée de la limite.
La calculatrice doit être en mode radian.
On peut noter que la suite $(\sin n)$ est de signe quelconque.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}\quad -1\leqslant \sin n\leqslant 1$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\leqslant u_n\leqslant\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ (car $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n>0$).

Or $-1<\dfrac{3}{4}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

$\boxed{9}$

Somme des n premiers entiers naturels :	Somme des puissances consécutives d'un même nombre différent de 1 :
$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\quad (n\in\mathbb{N}^*)$	$1+q+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad (q\neq 1)$ Il est important de noter que la formule de réduction de la somme $1+q+\ldots+q^n$ peut s'écrire aussi bien $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ que $\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (formule écrite dans l'autre sens avec q « devant »).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme 1)

$$=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

On laisse $n+1$.

Or $-1<\dfrac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]=1$.

Par produit par 3, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=3$.

$\boxed{10}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2n}\right)$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2n}\right)}_{X}=\dfrac{\pi}{4}\\ \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{4}}\sin X=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée suite-fonction, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On peut écrire $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ à la place de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Hugo Eremeef (le 20-11-2020)
Limite composée suite-fonction
Pour avoir la limite de cette suite, on cherche la limite de « l'intérieur » du sinus, puis on cherche la limite du sinus de la limite ».

$\boxed{11}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Une exploration numérique peut s'avérer judicieuse pour trouver le résultat.
Elle est en revanche insuffisante pour conclure (la proximité des termes u_{12}, u_{13} ne donne pas de conclusion valable).

On représente la suite dans la calculatrice.

On conjecture que la suite tend vers 0.

Définition :

> Soit a et b deux réels positifs.
> • On appelle quantité conjuguée de l'expression $a+\sqrt{b}$ l'expression $a-\sqrt{b}$.
> • On appelle quantité conjuguée de l'expression $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ l'expression $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Le + se transforme en –.

Exemple :

La quantité conjuguée de $2+\sqrt{3}$ est $2-\sqrt{3}$.

Exemple utilisé en 2^{e} :

Écrire $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1\times\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

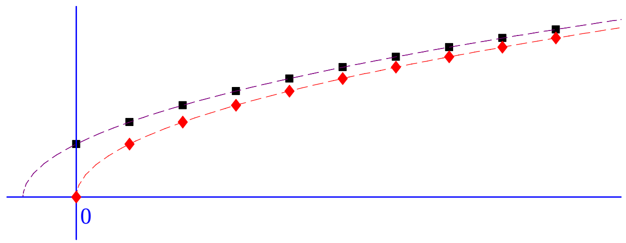
$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

On va lever l'indétermination. Pour cela, on transforme l'expression de u_n.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\times\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\times 1} \quad \text{(on utilise la quantité conjuguée du dénominateur)}\\ &= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ (justification facile) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) = +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On peut s'interroger sur la signification du résultat : comment est-ce possible ?



Si on représente les suites de terme général $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}$ par des nuages de points, on peut aisément observer que la différence entre $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}$ « rétrécit » et tend vers 0 lorsque n tend vers + ∞.

Cela correspond à une phénomène de courbes asymptotes que nous étudierons plus tard : les courbes représentatives des fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sont asymptotes en + ∞.

Étude d'une solution erronée :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n}\times\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n}\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty\\ &\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = 0\end{aligned}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } 0 \times \infty \text{ ».}$$

Si on met n en facteur, on « retombe » sur une F.I. du type « 0 × ∞ ».

Variante de cette solution erronée :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\times\frac{1}{n}}\\ &= \sqrt{n^2}\times\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{n^2}\times\sqrt{\frac{1}{n}}\\ &= |\,n\,|\times\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-|\,n\,|\times\sqrt{\frac{1}{n}}\\ &= n\times\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-n\times\sqrt{\frac{1}{n}}\\ &= n\times\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\end{aligned}$$

Remarque :

On peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ mais le + ne présente pas d'intérêt.

On peut utiliser un logiciel de calcul formel.

$\boxed{\mathbf{12}}$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = n^3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Déterminons un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 2011$.

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \geqslant 2011 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow n^3 \geqslant 2011\\ &\Leftrightarrow n \geqslant \sqrt[3]{2011}\end{aligned}$$

D'après la calculatrice, on a : $\sqrt[3]{2011} = 12,6222...$ (petits points indispensables, on écrit le début de l'écriture décimale de $\sqrt[3]{2011}$; toutes les décimales écrites sont justes).

Pour calculer $\sqrt[3]{2011}$ sur la calculatrice, il y a plusieurs possibilités :

Calculatrice Numworks :
Boîte à outils
$\sqrt[n]{x}$ racine *n*-ième

Calculatrice TI :
- On va dans MATH puis on utilise la « fonction » permettant de calculer la racine cubique d'un nombre.
- on tape : 2011 ^ (1/3) (ne pas oublier les parenthèses).

On choisit $N = 13$.

Donc si $n \geqslant 13$, alors $u_n \geqslant 2011$.

u_n ne sera jamais égal à 2011 mais ce n'est pas grave.

Vérification :
$u_{12} = 12^3 = 1728$
$u_{13} = 13^3 = 2197$

$\boxed{\mathbf{13}}$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (limite de référence)

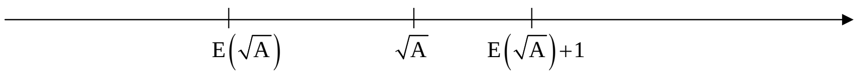
Déterminons un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant \mathrm{A}$.

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \geqslant \mathrm{A} \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow n^2 \geqslant \mathrm{A}\\ &\Leftrightarrow\Leftrightarrow n \geqslant \sqrt{\mathrm{A}} \quad \text{(équivalence valable car } n^2 \text{ et A sont des réels positifs)}\end{aligned}$$

On a $\mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right) \leqslant \sqrt{\mathrm{A}} < \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right)+1$

On fait un schéma.



1$^{\text{er}}$ cas : A est un carré parfait
Dans ce cas, on peut prendre $N = \sqrt{\mathrm{A}}$.

2$^{\text{e}}$ cas : A n'est pas un carré parfait
Dans ce cas, on peut prendre $N = \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right)+1$.

$\boxed{\mathbf{14}}$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$

Cherchons un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$ (1).

On utilise la calculatrice (avec la fonction $x \mapsto \left(-\dfrac{1}{3}\right)^x$).

Si $n \geqslant 7$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

Plus tard, on pourra résoudre l'exercice par le calcul grâce à la fonction logarithme népérien selon la démarche donnée ci-après.

$(1) \Leftrightarrow |u_n| < 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \left|\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right| < 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 10^{-3}$ *

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \ln 10^{-3}$ (car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

On écrit en couleur les ln qu'on a rajouté de part et d'autre.

$\Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < -3\ln 10$

$\Leftrightarrow -n\ln 3 < -3\ln 10$ (on a : $\ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$ par propriété du logarithme népérien)

$\Leftrightarrow n > \dfrac{-3\ln 10}{-\ln 3}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{3\ln 10}{\ln 3}$

D'après la calculatrice, $\dfrac{3\ln 10}{\ln 3} = 6{,}28770\ldots$

Si $n \geqslant 7$, alors $u_n \in \left]-10^{-3}\,;10^{-3}\right[$.

* On utilise la propriété suivante de la valeur absolue à connaître :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a^n| = |a|^n}$$

$$\left|\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right| = \left|-\dfrac{1}{3}\right|^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$$

On peut aussi utiliser le logarithme décimal :

$\Leftrightarrow \log\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] < \log\left(10^{-3}\right)$ (car la fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

On écrit en couleur les log qu'on a rajouté de part et d'autre.

$\Leftrightarrow n\log\left(\dfrac{1}{3}\right) < -3$

$\Leftrightarrow -n\log 3 < -3$ (on a : $\log\dfrac{1}{3} = -\log 3$ par propriété du logarithme népérien)

$\Leftrightarrow n > \dfrac{-3}{-\log 3}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\log 3}$

Autre piste : distinguer le cas *n* pair ; *n* impair.
Cette méthode est pénible à traiter.

Le 29 novembre 2022

14 limites de suites (2)

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 10^{-3}$

Il est possible d'écrire $\dfrac{1}{3} < \sqrt[n]{10^{-3}}$ mais cela ne donne rien.

L'expression $\dfrac{3\ln 10}{\ln 3}$ n'est pas simplifiable.

On peut juste mettre à part le 3, c'est-à-dire écrire $3\dfrac{\ln 10}{\ln 3}$, ce qui ne présente pas plus d'intérêt que cela.

On ne peut pas simplifier le quotient $\dfrac{\ln 10}{\ln 3}$.

Il n'existe pas de formule générale permettant de simplifier un quotient de la forme $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ où *a* et *b* sont deux réels strictement positifs avec *a* différent de 1.

15 erreur dans le corrigé $u_3 = -\dfrac{1}{3}$

Il s'agit d'une suite oscillante.
On dit que la suite a un comportement oscillant.

Autre méthode :
On s'intéresse aux suites extraites

$u_{2p} = \dfrac{1}{2p}$ tend vers 0

$u_{2p+1} = -\dfrac{1}{2p+1}$ tend vers 0

On a un théorème hors programme.
Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs convergent toutes les deux vers 0 donc la suite (u_n) converge aussi vers 0.

J'avais noté exactement :
- suite oscillante.
- comportement oscillant.

15

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1°) La suite (u_n) n'est pas monotone.

On peut calculer les premiers termes à la main :

$u_1 = \dfrac{(-1)^1}{1} = -1$, $u_2 = \dfrac{(-1)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{(-1)^3}{3} = -\dfrac{1}{3}$, $u_4 = \dfrac{(-1)^4}{4} = \dfrac{1}{4}$

On observe que $u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$, $u_3 < u_4$ etc. donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

Il s'agit d'une suite oscillante.

On dit que la suite a un comportement oscillant.

Autre argument possible :

Les termes sont alternativement positifs et négatifs.

On peut aussi rentrer la suite dans la calculatrice puis faire afficher les valeurs et éventuellement observer le graphique.

2°) **Déterminons la limite de la suite (u_n).**

On applique le théorème des gendarmes (avec un encadrement).
On procède ainsi car la suite $\left((-1)^n\right)$ n'a pas de limite.

① La suite $\left((-1)^n\right)$ est bornée entre – 1 et 1.

On traduit cela en inégalités de manière à avoir un encadrement.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ (inégalités larges car $(-1)^n$ est égal à 1 ou à – 1)

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (conservation du sens de l'inégalité puisque n est strictement positif).

On a obtenu un encadrement de u_n.
② On calcule ensuite la limite des deux suites qui encadrent.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Les deux limites sont toutes les deux égales à 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

Version fausse :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ car $(-1)^n = 1$ ou $(-1)^n = -1$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Autre méthode :
On s'intéresse aux suites extraites.
$u_{2p} = \dfrac{1}{2p}$ tend vers 0.

$u_{2p+1} = -\dfrac{1}{2p+1}$ tend vers 0.
On a un théorème hors programme.
Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs convergent toutes les deux vers 0 donc la suite (un) converge aussi vers 0.

3°) **Déterminons le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$.**

Il s'agit d'une détermination de valeur seuil.

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[\quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow |u_n| < 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < 10^{-2}$ [explication : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{\left|(-1)^n\right|}{|n|} = \dfrac{1}{n}$; $\left|(-1)^n\right| = 1$ de manière logique]

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{10^{-2}}$

$\Leftrightarrow n > 10^2$

$\Leftrightarrow n > 100$

L'entier naturel N cherché est 101 (si $n \geqslant 101$, alors $u_n \in \left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$).

On a déterminé une valeur seuil : à partir de $n = 101$, tous les termes de la suite rentrent dans l'intervalle $\left]-10^{-2}\,;10^{-2}\right[$.

On peut se référer à une vision graphique.

16

$u_n \leqslant v_n$

On réfléchis chaque fois par rapport à l'information donnée dans la colonne de gauche.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$	On ne peut rien dire. La suite (u_n) peut ne pas avoir de limite.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	On ne peut rien dire.
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$	On ne peut rien dire.
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$	On ne peut rien dire.

17

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$

1°) La suite (u_n) est-elle monotone ?

La suite (u_n) n'est pas monotone.
On le justifie par le calcul des premiers termes :
$u_0 = 0 + (-1)^0 = 1$, $u_1 = 1 + (-1)^1 = 0$, $u_2 = 2 + (-1)^2 = 3$, $u_3 = 3 + (-1)^3 = 2$, $u_4 = 4 + (-1)^4 = 5$.
On observe que $u_0 > u_1$, $u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$ etc.

N. B. : On peut démontrer que (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain indice.

2°) Déterminons la limite de la suite (u_n).

Version de recherche :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

On peut ajouter n à chaque membre de la double inégalité.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n - 1 \leqslant n + (-1)^n \leqslant n + 1$

Ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N} \quad n - 1 \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

On est dans le cadre d'application de l'extension du théorème des gendarmes.
Il suffit de conserver une seule inégalité.
On recommence.

Version correcte :

On garde un seul sens pour être dans les conditions d'application du théorème où une inégalité suffit.

① $\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n \geqslant -1$

On peut ajouter n aux deux membres de l'inégalité.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant n - 1 \quad (1)$.

② On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty \quad (2)$.

D'après (1) et (2), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ grâce à l'extension du théorème des gendarmes.

Autre méthode :

Suites extraites

$u_{2p} = 2p + 1 \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$

$u_{2p+1} = 2p + 1 - 1 \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$

On en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.