1ère S1

Contrôle du lundi 19 novembre 2012 (45 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………..………………. **Note : … / 20**

I. (3 points)

Dans cet exercice, on lance deux dés de couleurs différentes.
Les dés sont équilibrés et les faces sont numérotées de 1 à 6.
On s'intéresse à la somme des valeurs obtenues par les dés.

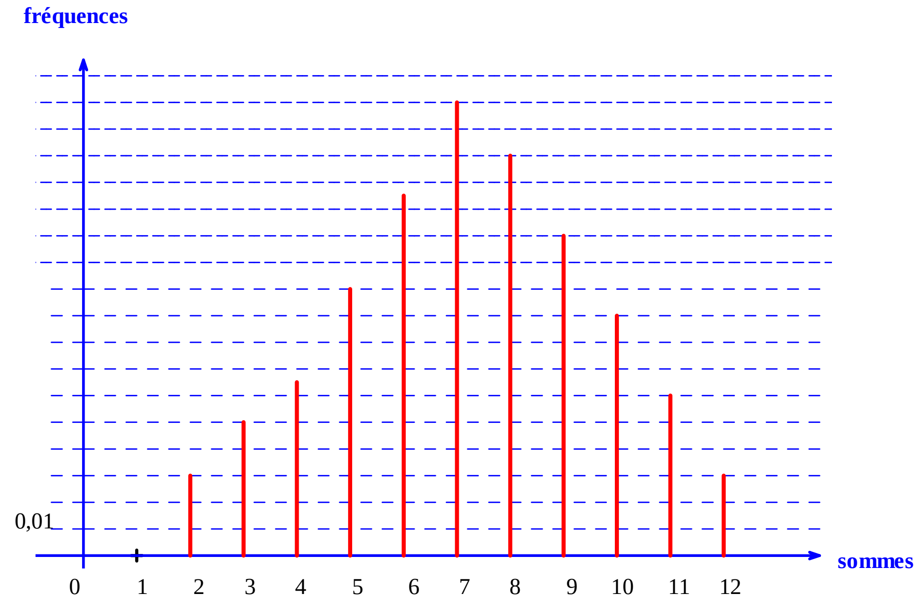
1°) On a lancé 25 fois les dés. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Numéro du lancer	Dé 1	Dé 2	Somme
1	5	1	6
2	1	1	2
3	1	4	5
4	1	6	7
5	4	4	8
6	6	4	10
7	6	3	9
8	5	6	11
9	5	3	8
10	5	6	11
11	3	6	9
12	2	5	7
13	3	5	8
14	1	6	7
15	6	5	11
16	2	3	5
17	2	5	7
18	3	4	7
19	2	4	6
20	6	5	11
21	1	1	2
22	2	1	3
23	1	4	5
24	5	1	6
25	1	6	7

Compléter le tableau ci-dessous donnant la distribution de fréquences pour cet échantillon (calculs au brouillon, fréquences sous forme décimale) :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence											

2°) On fait une simulation de 1000 expériences avec un tableur. On a alors obtenu un échantillon de taille 1000 c'est-à-dire une suite de 1000 entiers compris entre 2 et 12.
Cet échantillon est une série statistique. La distribution de fréquences est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.



La distribution est donnée dans le tableau ci-dessous.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence	0,03	0,05	0,065	0,1	0,135	0,170	0,15	0,12	0,09	0,06	0,03

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses (sans justifier).

① Dans la moitié des simulations, on a une somme paire. ☐ Vrai ☐ Faux

② La somme est supérieure ou égale à 9 dans moins de 25 % des parties. ☐ Vrai ☐ Faux

II. (5 points)
Un joueur mise 2 euros, puis lance un dé cubique équilibré. S'il obtient un numéro impair, il gagne 2 € ; s'il obtient le numéro 6, il gagne 10 € et, dans les autres cas, il perd 5 €.
X est la variable aléatoire qui à une partie, associe le gain algébrique en euros du joueur (attention à tenir compte de la mise).

1°) Compléter la phrase suivante sans expliquer :

X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots\ldots$, $x_2 = \ldots\ldots$, $x_3 = \ldots\ldots$.

2°) Compléter sans expliquer la loi de probabilité de X (mettre toutes les probabilités au même dénominateur).

x_i				
$P(\mathrm{X} = x_i)$				Total = 1

3°) Calculer l'espérance et l'écart-type de X (valeur exacte).
Écrire dans chaque cas la formule utilisé ; le détail des calculs n'est pas demandé.
Vérifier les résultats sur calculatrice.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (4 points)
On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - 3x$ si $x < 0$ et $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geqslant 0$.

1°) Écrire en langage naturel un algorithme qui demande un nombre réel en entrée et qui affiche en sortie son image par *f*.

On utilisera deux variables :
- la variable *x* dont le contenu est égal au nombre entré au départ ;
- la variable *y* dont le contenu est égal au nombre de sortie.

La réalisation du programme sur calculatrice n'est pas demandée (ce qui n'empêche pas de le faire à la fin).

Variables :
x, *y* réels

Entrée :
Saisir *x*

Traitement :

Sortie :
Afficher *y*

2°) Justifier brièvement que pour tout réel *x*, on a : $f(x) \geqslant 0$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

IV. (8 points) On considère le polynôme $u(x) = -x^2 - 2x + 3$.

1°) Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines de $u(x)$ sont …………………………………………………… .

2°) Donner sans explication le tableau de signes de $u(x)$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $u(x)$	

3°) Dresser sans explication le tableau de variation de u sur $\mathbb{R}$ (mettre la valeur de l'extremum).

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de u	

Faire des phrases exprimant les variations de u.

………..

………..

4°) On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition I de f. Compléter le modèle de rédaction ci-dessous.

$f(x)$ existe si et seulement si ……………………………………..…

L'ensemble de définition I de f est ………………………………. .

b) Dresser le tableau de variation de variation de f sur I. Justifier par une phrase.

x	…… $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ……
Variations de f	

………..

………..

5°) On pose $g(x)=\left|-x^2-2x+3\right|$.

Exprimer $g(x)$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

BONUS

(à traiter à la fin s'il reste du temps)

Soit $P(x)$ un trinôme du second degré.

Démontrer que si $P(-1)=0$, alors $P(x)$ peut s'écrire $ax^2+(a+c)x+c$ avec a et c réels et $a \neq 0$.

Corrigé du contrôle 19-11-2012

I.

Mots-clefs de cet exercice :

- échantillon
- taille (de l'échantillon)
- distribution de fréquences
- variabilité

1°) Tableau des fréquences pour l'échantillon

L'énoncé demande les fréquences sous forme décimale (et non sous forme fractionnaire).

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence	**0,08**	**0,04**	**0**	**0,12**	**0,12**	**0,24**	**0,12**	**0,08**	**0,04**	**0,16**	**0**

2°)

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence	0,03	0,05	0,065	0,1	0,135	0,170	0,15	0,12	0,09	0,06	0,03

① Dans la moitié des simulations, on a une somme paire. **Vrai**

② La somme est supérieure ou égale à 9 dans moins de 25 % des parties. **Faux**

① 0,03 + 0,065 + 0,135 + 0,15 + 0,09 + 0,03 = 0,5

② 0,12 + 0,09 + 0,06 + 0,03 = 0,3 > 0,25

II.

Un joueur mise 2 euros, puis lance un dé cubique équilibré. S'il obtient un numéro impair, il gagne 2 € ; s'il obtient le numéro 6, il gagne 10 € et, dans les autres cas, il perd 5 €.
X est la variable aléatoire qui à une partie, associe le gain algébrique en euros du joueur (attention à tenir compte de la mise).

1°) Valeurs possibles de X

X peut prendre les valeurs $x_1 = -7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$.

2°) Loi de probabilité de X

x_i	**– 7**	**0**	**8**	
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	Total = 1

3°) **Calculons l'espérance et l'écart-type de X.**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P(X = x_i)$$
$$= -7\times\frac{2}{6} + 0\times\frac{3}{6} + 8\times\frac{1}{6}$$
$$= -1$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=3} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i)$$
$$= (-1+1)^2\times\frac{2}{6} + (0+1)^2\times\frac{3}{6} + (8+1)^2\times\frac{1}{6}$$
$$= 26$$

Avec la formule de Kœnig-Huygens

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{i=3} (x_i)^2 \times P(X = x_i)\right) - \left[E(X)\right]^2$$
$$= (-7)^2\times\frac{2}{6} + 0^2\times\frac{3}{6} + 8^2\times\frac{1}{6} - (-1)^2$$
$$= 26$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{26}$ (valeur exacte)

(Avec la calculatrice, on obtient : $\sigma(X) = 5{,}09901951...$)

On vérifie que les résultats coïncident avec ceux obtenus avec la calculatrice.

III.

$$f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On peut noter que la fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$ (ça aurait pu être une question du contrôle).
En effet,

- si $x < 0$, l'expression $1 - 3x$ est calculable sans problème.
- si $x \geqslant 0$, l'expression $\sqrt{x}$ est calculable.

1°) **Écrivons un algorithme qui demande un nombre réel en entrée et qui affiche en sortie son image par *f*.**

Variables :
x, *y* réels

Entrée :
Saisir *x*

Traitement :
Si $x < 0$
  Alors *y* prend la valeur $1 - 3x$
  Sinon *y* prend la valeur $\sqrt{x}$
FinSi

Sortie :
Afficher *y*

On peut programmer cet algorithme sur la calculatrice.

2°) **Justifions que pour tout réel *x*, on a : $f(x) \geqslant 0$.**

On raisonne en distinguant deux cas.

- Si $x < 0$, on a : $f(x) = 1 - 3x$.

$x < 0$ donc $-3x > 0$ d'où $1 - 3x > 1$.
On en déduit que $f(x) \geqslant 0$.

- Si $x \geqslant 0$, on a : $f(x) = \sqrt{x}$.

Le signe de $\sqrt{x}$ est positif ou nul.
On en déduit que $f(x) \geqslant 0$.

En conclusion, on peut dire que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$.

IV. $u(x) = -x^2 - 2x + 3$

Le barème de cet exercice était particulièrement sévère (juste ou faux) car j'estimais que l'on pouvait vérifier tous les résultats à la calculatrice).

1°) Les racines de $u(x)$ sont **1 et – 3** (racine évidente, discriminant, programme sur la calculatrice).

2°) **Tableau de signes de $u(x)$**

On applique la règle du signe d'un trinôme du second degré (cas où l'on a deux racines c'est-à-dire où le discriminant est strictement positif).

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $u(x)$		–	0	+	0	–	

3°) **Tableau de variation de *u* sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de *u*		↗	4	↘	

La fonction u est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;-1]$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;+\infty[$.

On vérifie ces variations en effectuant le tracé sur calculatrice.

4°) $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$

a) **Déterminons l'ensemble de définition I de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $-x^2-2x+3\geqslant 0$

si et seulement si $-3\leqslant x\leqslant 1$

L'ensemble de définition I de f est **[– 3 ; 1]**.

b) **Tableau de variation de variation de *f* sur I.**

x	-3		-1		1
Variations de f	0	↗	2	↘	0

$f(x)=\sqrt{u(x)}$

$\forall x\in \mathrm{I}\quad u(x)\geqslant 0$

Les variations de f et de u sur I sont les mêmes.

On calcule les extremums de f afin de compléter le tableau de variations de f.

$f(-3)=\sqrt{-(-3)^2-2\times(-3)+3}=0$

$f(1)=\sqrt{-1^2-2\times1+3}=0$

$f(-1)=\sqrt{4}=2$

On vérifie ces variations en effectuant le tracé sur calculatrice.

5°) $g(x)=\left|-x^2-2x+3\right|$

Exprimons *g* (*x*) sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de *x*.

On remarque que $g(x)=\left|u(x)\right|$.

On doit étudier le signe de l'expression placée entre les barres de valeur absolue.
On utilise le tableau de signe de $u(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $u(x)$		+	0	–	0	+	

• Si $x\in\ ]-\infty\ ;-3]\cup[1\ ;+\infty[$, alors $u(x)\leqslant 0$.

Donc $g(x)=-u(x)$ soit $g(x)=x^2+2x-3$

• Si $x\in[-3\ ;1]$, $u(x)\geqslant 0$.

Donc $g(x)=u(x)$ soit $g(x)=-x^2-2x+3$

BONUS

Soit $P(x)$ un trinôme du second degré.

$P(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$

Démontrons que si $P(-1)=0$, alors $P(x)$ peut s'écrire $ax^2+(a+c)x+c$ avec a et c réels et $a\neq 0$.

On : $P(-1)=a(-1)^2+b\times(-1)x+c$
$\quad =a-b+c$

Or $P(-1)=0$ donc $a-b+c=0$ d'où $b=a+c$.

On en déduit que $P(x)=ax^2+(a+c)x+c$.

Une autre méthode (moins bonne) consiste à passer par la somme et le produit des racines.