**1$^{ère}$ S1**

# Devoir pour le vendredi 16 novembre 2012

On considère le programme de calcul suivant : prendre un nombre, lui ajouter 1, prendre la racine carrée du résultat obtenu, puis diviser le tout par le nombre de départ.

1°) Écrire un algorithme correspondant à ce programme de calcul.

2°) Qu'obtient-on en sortie si l'on entre – 1 ? 3 ? – 2 ? 0 ?

Donner les résultats (valeurs exactes) sans justifier ni détailler les calculs.

3°) Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f$ définie par cet algorithme.
Écrire directement l'expression sans justifier.

4°) Quel est l'ensemble de définition de cette fonction* ? En déduire une écriture plus précise de l'algorithme de la question 1°) (il faut donc réécrire l'algorithme). Programmer alors cet algorithme sur calculatrice.

5°) Déterminer à l'aide d'un logiciel de calcul formel la valeur exacte du (ou des) antécédent(s) du nombre 2 par $f$.

* Pour la recherche de l'ensemble de définition de la fonction $f$, on utilisera la rédaction suivante (« chaîne d'équivalences ») :

$f(x)$ existe si et seulement si …..

si et seulement si …..

# Corrigé du DM pour le 16-11-2012

1°) **Écrivons un algorithme correspondant à ce programme de calcul.**

Dans la rédaction de l'algorithme, on utilisera $x$ comme variable pour désigner le nombre saisi en entrée et $y$ le résultat obtenu en sortie (on n'utilise pas de notation $f(x)$ dans un algorithme de calcul de valeur de fonction ; on utilise en général la lettre $y$).

**Variables :** $x$, $y$, $a$, $b$ réels

**Entrée :**
Saisir $x$

**Traitement et sortie :**
$a$ prend la valeur $x + 1$
$b$ prend la valeur $\sqrt{a}$
$y$ prend la valeur $\dfrac{b}{x}$

**Sortie :**
Afficher $y$

On peut mettre directement « $y$ prend la valeur $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ » mais cela correspond moins au programme de calcul.
On doit retrouver les étapes du programme de calcul dans l'algorithme.

De plus, on évite de mettre des gros calculs dans les algorithmes ; on préfère les séparer.

2°) **Déterminons ce que l'on obtient en sortie si l'on entre – 1 ; 3 ; – 2 ; 0.**

Si l'on entre – 1, on obtient 0 en sortie.

Si l'on entre 3, on obtient $\dfrac{2}{3}$ en sortie.

Si l'on entre – 2, on n'obtient rien en sortie (le calcul de la racine carrée est impossible). L'algorithme ne peut pas fonctionner.

Si l'on entre 0, on n'obtient rien en sortie (le calcul du quotient est impossible à cause du dénominateur qui vaut 0). L'algorithme ne peut pas fonctionner.

On ne parle pas de $f$ dans cette question puisque l'énoncé ne parle de fonction qu'à la question 3°).

3°) **Déterminons l'expression algébrique de la fonction *f* définie par cet algorithme.**

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

4°)

**• Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

On commence par analyser les types de problèmes que pose l'expression de *f*.
On a la présence d'une racine carrée et d'un dénominateur.
La quantité qui est présente sous la racine doit être positive ou nulle.
La quantité qui est présente au dénominateur doit être non nulle.

$f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \geqslant 0$ $\boxed{\textbf{et}}$ $x \neq 0$

si et seulement si $x \geqslant -1$ $\boxed{\textbf{et}}$ $x \neq 0$

L'ensemble de définition de *f* est $[-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

**• Déduisons-en une écriture plus précise de l'algorithme de la question 1°).**

On peut rédiger l'algorithme de plusieurs façons en utilisant une ou plusieurs instructions conditionnelles.
On peut utiliser des alternatives simples ou complètes.
On respecte les indentations permettant une meilleure lisibilité de l'algorithme.
On peut faire préalablement, si on le désire, un organigramme.

**Variables :** $x$, $y$, $a$, $b$ réels

**Entrée :**
Saisir $x$

**Traitement et sortie :**
**Si** $x \geqslant -1$
  Alors
    **Si** $x \neq 0$
      Alors $a$ prend la valeur $x+1$
        $b$ prend la valeur $\sqrt{a}$
        $y$ prend la valeur $\frac{b}{x}$
        Afficher $y$
      **Sinon** Afficher « problème »
    **FinSi**
  **Sinon** Afficher « problème »
**FinSi**

Plutôt que **Afficher « problème »**, on peut aussi mettre **Afficher « erreur » ou Afficher « impossible » ou** . **Afficher « la valeur en entrée ne convient pas ».**

**Autres possibilités :**

On écrit la condition avec un « et » c'est-à-dire en quelque sorte que l'on a deux conditions (c'est tout à fait possible en langage de programmation).

**Variables :** $x$, $y$, $a$, $b$

**Entrée :**
Saisir $x$

**Traitement et sortie :**
**Si** $x \geqslant -1$ et $x \neq 0$
Alors $a$ prend la valeur $x + 1$
$b$ prend la valeur $\sqrt{a}$
$y$ prend la valeur $\dfrac{b}{x}$
Afficher $y$
**Sinon** Afficher « problème »
**FinSi**

On peut aussi écrire l'algorithme avec deux alternatives complètes : « Si … Alors … FinSi ».

La réalisation du programme sur calculatrice ne pose pas de problème (pour le « et », on utilise $\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{MATH}}$ (TEST) puis aller dans « LOGIQUE ».

5°) **Déterminons à l'aide d'un logiciel de calcul formel la valeur exacte du (ou des) antécédent(s) du nombre 2 par *f*.**

On résout l'équation $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = 2$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel (tel que XCas).
Attention à bien choisir le bon « Résoudre » de manière à obtenir la valeur exacte et non une valeur décimale approchée.

resoudre ( (sqrt ( x + 1) / x ) = 2, x)

Remarque : En utilisant le « resoudre – numérique », on obtient x = 0,640388203202.

L’antécédent de 2 par $f$ est $\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ (valeur exacte).

Ce nombre est un nombre irrationnel.

---

On peut retrouver cette valeur par le calcul.

Pour cela, on doit résoudre algébriquement l’équation $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=2$ (1).

Il s’agit d’une équation irrationnelle.

Il faut d’abord dire que nécessairement $x > 0$ puis que (1) donne alors par élévation des deux membres au carré $\dfrac{x+1}{x^2}=4$.

Cette dernière équation est successivement équivalente à $x+1=4x^2$ soit $4x^2-x-1=0$.
On calcule le discriminant. On trouve deux racines de signes contraires.
On ne garde que la solution positive.