TS1

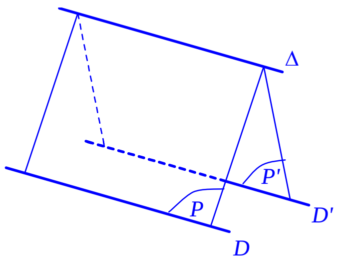
Contrôle du jeudi 15 novembre 2012 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………….

Note : ……/20

I. (2 points) On considère la figure ci-dessous où P et P' sont des plans, D, D', Δ sont des droites vérifiant les hypothèses suivantes : $D \subset P$, $D' \subset P'$, $D\,//\,D'$, $P \cap P' = \Delta$.

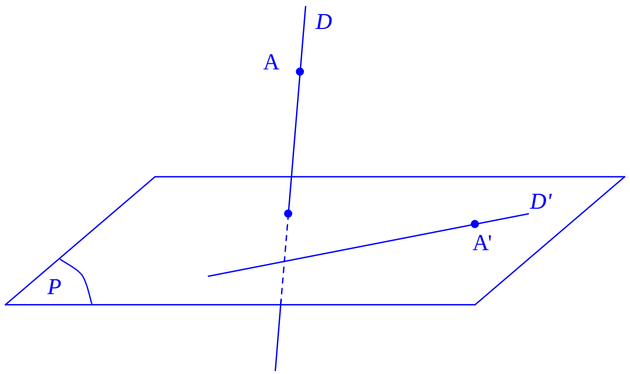
Énoncer en français (sans utiliser les lettres P, P', D, D', Δ) le théorème du cours relatif à cette figure.



……..

……..

II. (3 points) On considère la figure ci-dessous qui représente deux droites D et D' non coplanaires de l'espace.
A est un point quelconque de D et A′ est un point quelconque de D'.
On note π le plan défini par le point A et la droite D' et π' le plan défini par le point A′ et la droite D.
Déterminer l'intersection des plans π et π' (rédiger en faisant attention à la précision du vocabulaire employé ; on pourra utiliser à bon escient les symboles mathématiques usuels : appartenance, inclusion ...).
Ne rien tracer sur la figure.



……..

……..

……..

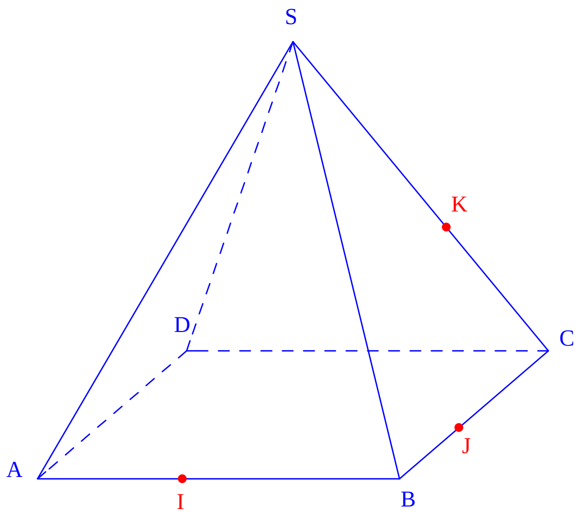
……..

……..

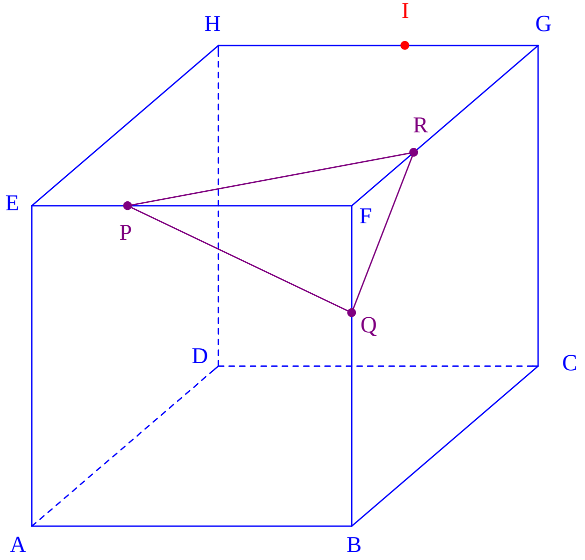
……..

……..

III. (3 points) Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré.
Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [BC], [SC].
Construire sans expliquer la section de la pyramide par le plan (IJK).
Laisser apparents les traits de construction au crayon. On nommera les points de construction utiles.



IV. (3 points) Soit ABCDEFGH un cube. Trois points P, Q, R sont pris respectivement sur]EF[,]FB[,]FG[.
On marque un point I sur]GH[.
Tracer la section du cube par le plan ***P*** parallèle à (PQR) passant par I.



V. (5 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes.

$e^{x+1}=1$ (1) ; $e^{x}=3$ (2) ; $e^{x^2-2x}\leqslant 1$ (3) ; $e^{2x}<-2$ (4) ; $e^{-x}\geqslant -1$ (5).

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 de ces équations et inéquations.

………

………

………

………

………

………

………

VI. (2 points) Étudier le signe de l'expression $1-e^{x-2}$ suivant les valeurs de x.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VII. (1 point) Soit a et b deux réels quelconques. Simplifier l'expression $\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}$.

………

VIII. (1 point) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{e^{nx}}{e^{x}+1}$.

Démontrer que pour tout réel x on a : $f_{n+1}(x)+f_n(x)=e^{nx}$.

………

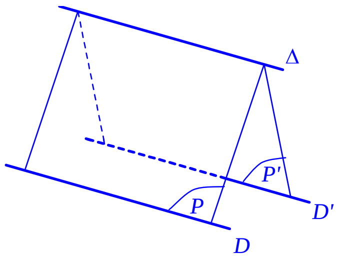
………

Bonus :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{\left(e^{x}\right)}=2$.

Corrigé du contrôle du 15-11-2012

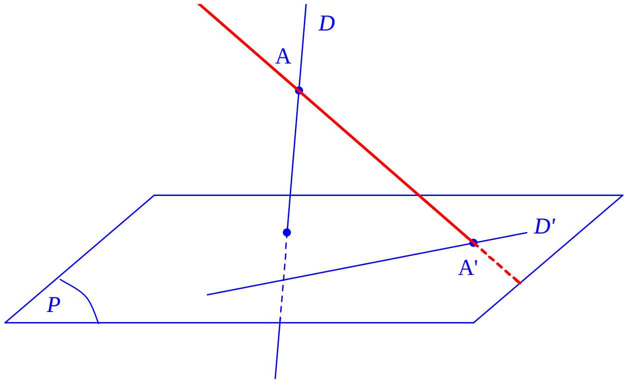
I. On cite (énonce) le « théorème du toit ».



Énoncé du théorème du toit

Si deux droites contenues dans deux plans sécants sont parallèles, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection.

II.



D et D' : droites non coplanaires de l'espace

A $\in D$
A' $\in D'$

π : plan défini par A et D'
π' : plan défini par A' et D

Déterminons l'intersection des plans π et π'.

1. A $\in \pi$
A $\in D$ donc A $\in \pi'$

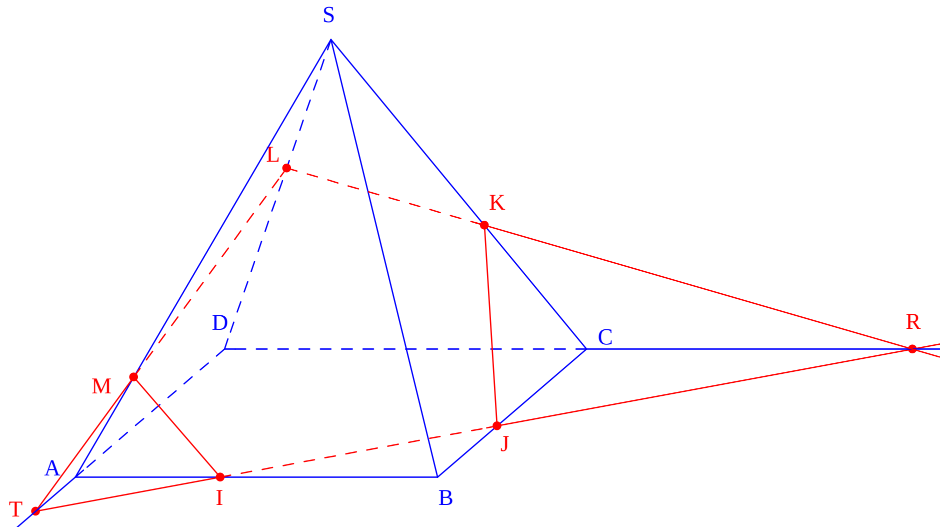
D'où A est un point commun à π et π'.

2. A' $\in \pi'$
A' $\in D'$ donc A' $\in \pi$

D'où A' est un point commun à π et π'.

3. A et A' sont deux points communs à π et π'.
Ces deux points sont distincts car D et D' sont non coplanaires.
Les plans π et π' ne sont pas confondus donc $\pi \cap \pi' = (\text{AA}')$.

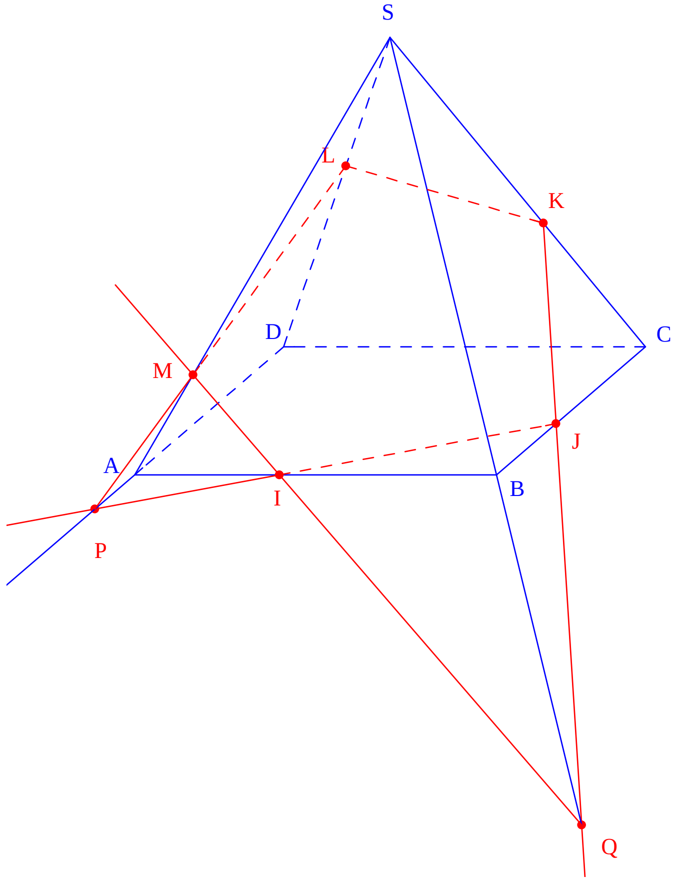
III. On utilise la méthode de tracé hors solide.

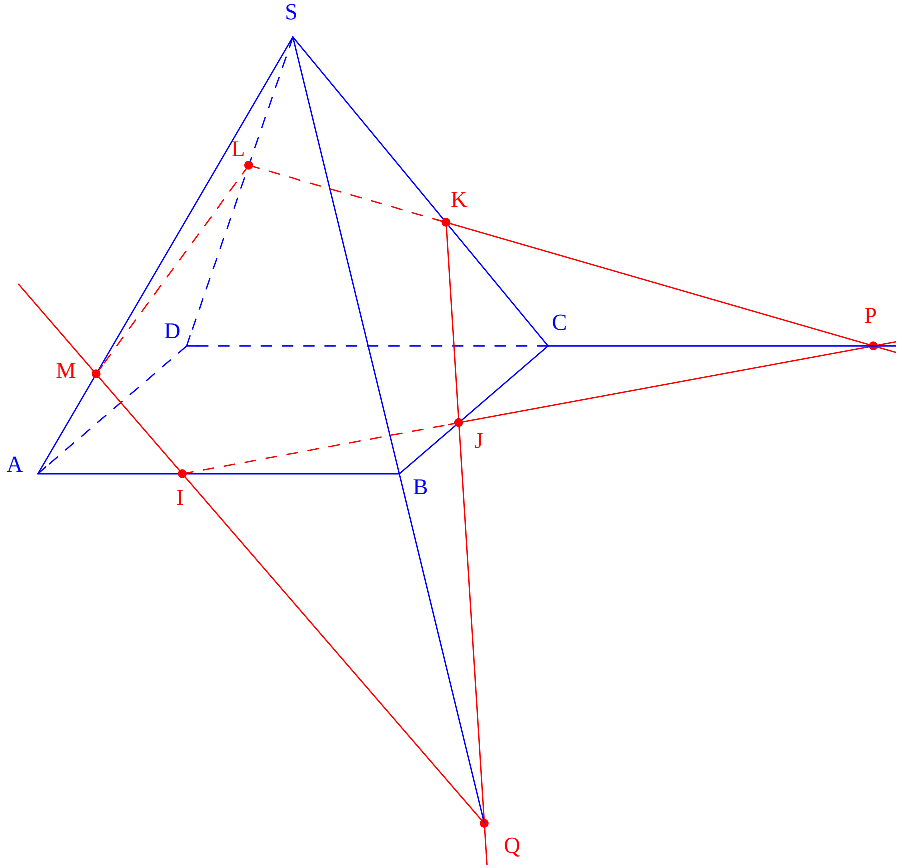


La section de la pyramide par le plan (IJK) est le pentagone IJKLM.

Le fait que la pyramide soit régulière n'intervient pas.
Il en est de même du fait que ABCD soit un carré.

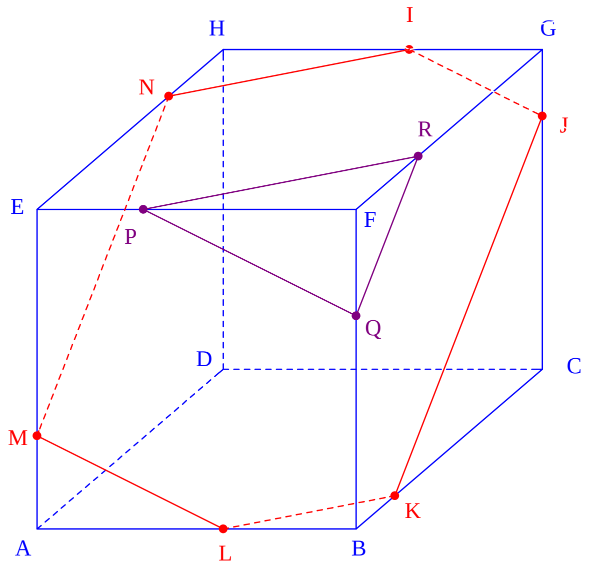
Autre méthode possible : par prolongement des droites (BS) et (JK) (mais peut-être un peu juste au point de vue place).

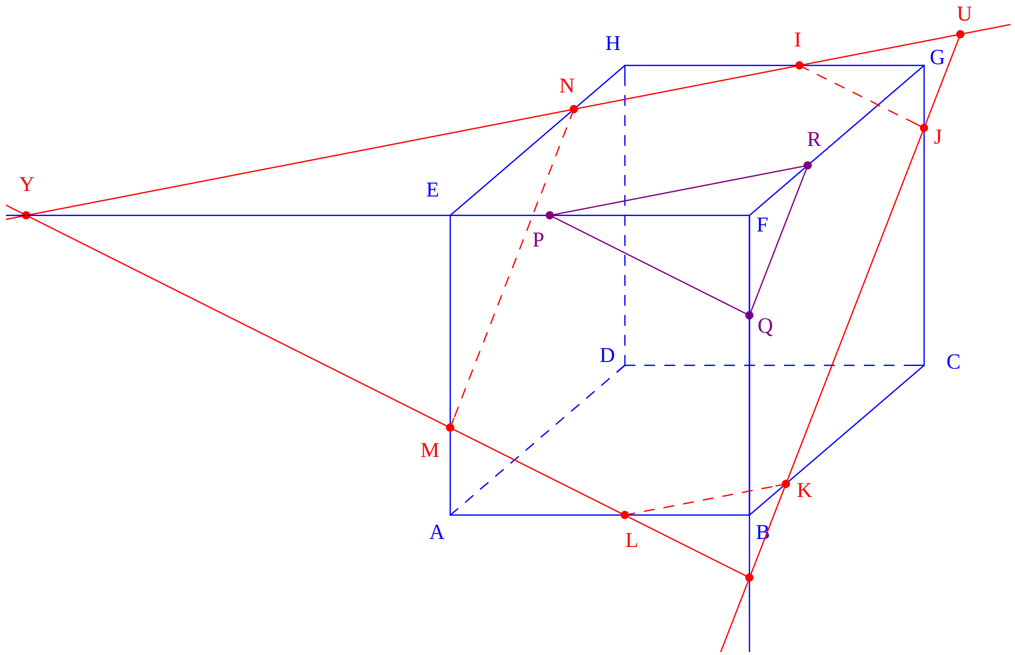




IV.

On peut utiliser la méthode de parallélisme.





La section du cube par le plan $\boldsymbol{P}$ est l'hexagone IJKLMN.

Remarques :

1. On ne fait pas apparaître le nom du plan $\boldsymbol{P}$ sur la figure.

2. On peut aussi faire un mix de méthode de parallélisme et de méthode de tracé hors solide c'est-à-dire qu'au départ on construit les points J et N appartenant respectivement aux arêtes [GH] et [EH] tels que (IJ) // (PQ) et (IN) // (PR).
On a ainsi trois points distincts du plan $\boldsymbol{P}$.
On peut ensuite obtenir les points M, L, K par tracé hors solide.
Les parallèles apparaissent toutes seules (attention cependant aux imprécisions de tracé : l'imprécision du tracé fait parfois que des droites qui devraient être parallèles n'apparaissent pas parallèles).

V. Équations et inéquations avec exponentielles

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x+1}=1$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{e}^{x+1}=\mathrm{e}^{0}$

$\Leftrightarrow$ $x+1=0$

$\Leftrightarrow$ $x=-1$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\{-1\}}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x}=3$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow$ $x=\ln 3$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boldsymbol{S_2=\{\ln 3\}}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-2x} \leqslant 1$ (3).**

$$(3) \Leftrightarrow e^{x^2-2x} \leqslant e^0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2) \leqslant 0$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3 = [0\,;2]$

d. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} < -2$ (4).**

Une exponentielle est toujours strictement positive donc l'inéquation (4) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (1).

$S_4 = \varnothing$

d. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x} \geqslant -1$ (5).**

Une exponentielle est toujours strictement positive.
Donc tous les réels sont solutions de (5).

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5 = \mathbb{R}$

VI. Étudions le signe de l'expression $1-e^{x-2}$ suivant les valeurs de x.

Pour déterminer le signe de cette expression, on résout deux inéquations et une équation.

$1-e^{x-2}<0$ (1)	$1-e^{x-2}>0$ (2)	$1-e^{x-2}=0$ (3)
$(1) \Leftrightarrow 1<e^{x-2}$	$(2) \Leftrightarrow e^{x-2}<1$	$(3) \Leftrightarrow e^{x-2}=1$
$\Leftrightarrow 0<x-2$	$\Leftrightarrow x-2<0$	$\Leftrightarrow x-2=0$
$\Leftrightarrow x>2$	$\Leftrightarrow x<2$	$\Leftrightarrow x=2$

On conclut en dressant le tableau de signes de l'expression.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $1-e^{x-2}$		$+$	0	$-$	

VII. Simplifions l'expression $\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}} &= \sqrt{e^{2a+2b}}\\ &= \sqrt{e^{2(a+b)}}\\ &= e^{\frac{2(a+b)}{2}}\\ &= e^{a+b}\end{aligned}$$

VIII. $f_n(x)=\dfrac{e^{nx}}{e^x+1}$ $(n\in\mathbb{N})$

Démontrons que pour tout réel x on a : $f_{n+1}(x)+f_n(x)=e^{nx}$.

$$f_{n+1}(x)=\frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f_{n+1}(x)+f_n(x) &= \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}+\frac{e^{nx}}{e^x+1}.\\ &= \frac{e^{nx+x}}{e^x+1}+\frac{e^{nx}}{e^x+1}\\ &= \frac{e^{nx}\times e^x}{e^x+1}+\frac{e^{nx}}{e^x+1}\\ &= \frac{e^{nx}\left(e^x+1\right)}{e^x+1}\\ &= e^{nx}\end{aligned}$$

Bonus :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{\left(e^x\right)}=2$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow e^x=\ln 2$$
$$\Leftrightarrow x=\ln(\ln 2) \quad (\text{car comme } 2>1 \text{ on a } \ln 2>0)$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{\ln(\ln 2)\}$

Remarque :

Avec la calculatrice, on obtient $\ln(\ln 2)=0{,}366666\ldots$ (seule la valeur exacte était demandée).