1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 29 novembre 2012 (3 heures)

Le barème est donné sur 40.

• Une feuille de réponses est jointe au sujet afin de traiter les exercices **I**, **II**, **V**, **VI**.

• Les exercices **III** et **IV** seront rédigés sur une copie séparée à insérer dans la feuille de réponses.
On veillera au soin et à la présentation de cette copie (résultats encadrés à la règle…).

I. (8 points) QCM

Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter très lisiblement le tableau de réponses avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble des solutions de l'équation $x^4+x^2-2=0$ est :

a. $\{1\,;-1\}$ b. $\{1\,;-2\}$ c. $\{\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\,;1\,;-1\}$

2°) Le discriminant de l'équation $x^2+(m-1)x+m-2=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ (m est un réel fixé) est égal à :

a. m^2-4m+9 b. $(m-3)^2$ c. m^2-2m-7

3°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+1)(x^2+x-2)>0$ est :

a. $]-\infty\,;-2[\cup]-1\,;1[$ b. $]-2\,;-1[$ c. $]-2\,;-1[\cup]\,1\,;+\infty[$

4°) L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{3x-2-x^2}{x-4}=0$ est :

a. $\{1\,;2\}$ b. $\{1\,;2\,;4\}$ c. $\{-1\,;2\}$

5°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2}{x}\leqslant x-1$ est :

a. $]-\infty\,;-1]\cup]0\,;2]$ b. $[-1\,;0[\cup[2\,;+\infty[$ c. $[-1\,;2]$

6°) Le domaine de définition de la fonction f : $x\mapsto\dfrac{2}{|x|-3}$ est :

a. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ b. $\mathbb{R}_+$ c. $\mathbb{R}\setminus\{3\,;-3\}$

7°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{2x}{x-1}$ est :

a. $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ b. $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ c. $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[$

8°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x+4|\geqslant 1$ est :

a. $[-3\,;+\infty[$ b. $]-\infty\,;-5]\cup[-3\,;+\infty[$ c. $[-5\,;-3]$

II. (6 points)

On considère la fonction f : $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathbf{D}$ de f.

2°) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbf{D}$ au moyen du tableau donné sur la copie.

3°) Déterminer le(s) antécédent(s) de 1 par f.

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Le point $\left(2\,;\sqrt{2}+1\right)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Le point B(16 ; 0,333) appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifier.

5°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième du réel a confondu avec son image.

III. (5 points)

Soit RST un triangle quelconque. On désigne par K le milieu de [RS].
On note H et L les points définis par $\overrightarrow{\text{TH}}=-3\overrightarrow{\text{TR}}$ et $3\overrightarrow{\text{SL}}=2\overrightarrow{\text{TL}}$. La figure n'est pas demandée.

1°) Exprimer $\overrightarrow{\text{TL}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{TS}}$.

2°) Exprimer $\overrightarrow{\text{TK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{TR}}$ et $\overrightarrow{\text{TS}}$.

3°) Exprimer $\overrightarrow{\text{HL}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{TR}}$ et $\overrightarrow{\text{TS}}$.

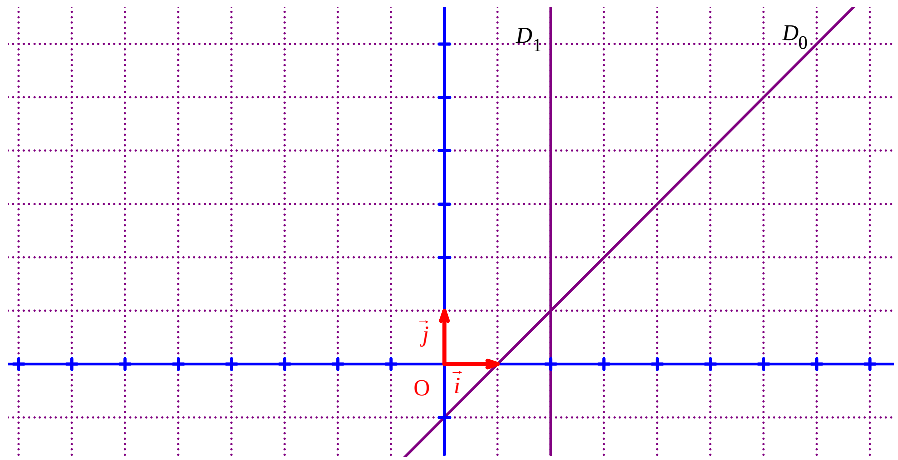
4°) En déduire que (HL) est parallèle à (TK).

IV. (5 points)

Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Pour tout réel m, on note D_m la droite d'équation $(2m-1)x-(m-1)y+1-3m=0$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les droites D_0 et D_1.



1°) Écrire sans explication une équation cartésienne de D_{-2} (c'est-à-dire que l'on a pris $m=-2$).
Reproduire le graphique sur la copie (avec les droites D_0 et D_1) et tracer sans explication la droite D_{-2}.

2°) Démontrer que toutes les droites D_m passent par un même point K dont on donnera les coordonnées.

3°) a) Déterminer, pour $m \neq 1$, le coefficient directeur de D_m.
b) Déterminer *m* pour que D_m ait pour coefficient directeur 3 (*).

4°) Déterminer *m* pour que D_m passe par le point A(3 ; – 1) (*).

(*) Pour ces deux questions, un modèle de rédaction (à suivre) sous forme de chaîne d'équivalences est donné à la fin du sujet.

Dans les exercices V et VI, le détail des calculs n'est pas demandé. On donnera les résultats sans justifier.

V. (8 points)

On dispose de 3 urnes U, V, W.
L'urne U contient 2 boules numérotées 1 et 2.
L'urne V contient 2 boules numérotées 2 et 3.
L'urne W contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3.
On prend au hasard une boule dans l'urne U, puis une boule dans l'urne V puis une boule dans l'urne W.
On note (x, y, z) le triplet ainsi obtenu.
On donnera tous les résultats des probabilités sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Déterminer le nombre d'issues possibles.

2°) Déterminer la probabilité des événements suivants :
A : « $x \leqslant z$ » ; B : « *x*, *y* et *z* sont deux à deux distincts* » ; C : « $x+y+z=6$ ».

3°) Calculer les probabilités des événements : A ∩ C ; B ∩ C ; A ∪ C ; B ∪ C.

*deux à deux distincts : c'est-à-dire tous différents

VI. (8 points)

Une urne contient une boule noire et *n* boules blanches, où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Les boules sont indiscernables au toucher.
On prélève au hasard une boule de l'urne : si c'est la noire, on gagne 10 € ; si elle est blanche, on perd 1 €.
On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique en euros après le prélèvement d'une boule.

Partie A

On suppose dans cette partie qu'il y a 10 boules blanches, c'est-à-dire que l'on a $n=10$.

1°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2°) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ(X) (valeurs exactes sous forme simplifiée).

3°) Compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de simuler la variable aléatoire X.

Traitement et sortie :
a prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 11
Si $a=1$
  Alors X prend la valeur …
  Sinon X prend la valeur …
FinSi

Partie B

Dans cette partie, *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

1°) Exprimer l'espérance et l'écart-type de X en fonction de *n* (sous forme d'un seul quotient simplifié).

2°) Déterminer pour quelles valeurs de *n* on a $\text{E}(\text{X}) \geqslant 0$.

3°) Déterminer *n* tel que l'on ait $\text{E}(\text{X})=-\dfrac{1}{2}$.

4°) a) Démontrer que pour tout entier naturel *n* non nul on a : $\sigma(\text{X}) \leqslant \dfrac{11}{2}$.

b) Représenter la fonction $f : x \mapsto \dfrac{11\sqrt{x}}{x+1}$ définie sur [0 ; + ∞[sur l'écran de la calculatrice.
Dresser sans expliquer le tableau de variation de f et retrouver sans calcul le résultat de la question précédente.

c) Avec un logiciel de calcul formel, on a résolu un certain nombre d'inéquations.
Dans le tableau ci-dessous, on donne dans la colonne de gauche les inéquations et dans la colonne de droite les réponses fournies par le logiciel.

$f(x)<0{,}1$	$0 \leqslant x < 0{,}000082658291$ ou $x > 12097{,}9999173$
$f(x)<0{,}01$	$0 \leqslant x < 8{,}26447647021\times10^{-7}$ ou $x > 1{,}209998\times10^{6}$
$f(x)<0{,}001$	$0 \leqslant x < 8{,}26446294652\times10^{-9}$ ou $x > 1{,}20999998\times10^{8}$

À l'aide de ces résultats, déterminer le plus petit entier naturel *n* non nul tel que :

- $\sigma(\text{X})<0{,}1$
- $\sigma(\text{X})<0{,}01$
- $\sigma(\text{X})<0{,}001$.

Modèle de rédaction pour deux questions de l'exercice IV (questions 3°) b) et 4°)).

D_m a pour coefficient directeur 3 si et seulement si ………	$\text{A} \in D_m$ si et seulement si ………
si et seulement si ………	si et seulement si ………
si et seulement si ………	si et seulement si ………

1ère S1 Feuille de réponses du contrôle du jeudi 26 novembre 2012

Prénom et nom : ……………………………………………… **Note :** …….. / 40 = …….. **/ 20**

I. (8 points)	II. (6 points)	III. (5 points)	IV. (5 points)	V. (8 points)	VI. (8 points)

I. (8 points) QCM (compléter très lisiblement et sans rature)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	7°)	8°)	Total
Réponse	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….

II. (6 points) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

1°) $f(x)$ existe si et seulement si …………………………

si et seulement si …………………………

D = ………………..

2°) Faire les flèches de variation à la règle.

x	
$\sqrt{x}$	
$\sqrt{x}-1$	
$f(x)$	

3°) ………

………

………

………

………

………

………

4°)

• A$(2\,;\,\sqrt{2}+1)$	• B(16 ; 0,333)
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………

5°) $a \approx$ …………….. (valeur arrondie au millième)

V. (8 points)

1°) Nombre d'issues possibles : ……………..

2°) $P(\text{A}) = ………….$ $P(\text{B}) = ………….$ $P(\text{C}) = ………….$

3°) $P(\text{A} \cap \text{C}) = ………….$ $P(\text{B} \cap \text{C}) = ………….$ $P(\text{A} \cup \text{C}) = ………….$ $P(\text{B} \cup \text{C}) = ………….$

VI. (8 points)

Partie A

1°) X peut prendre les valeurs $x_1 = ….$ et $x_2 = …..$

x_i		
$P(\text{X} = x_i)$		Total = 1

2°) $\text{E}(\text{X}) = ………..$ (écrire un seul résultat) ; $\sigma(\text{X}) = ………..$ (écrire un seul résultat)

3°)

Traitement et sortie :
a prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 11 (au sens large)
Si $a = 1$
  Alors X prend la valeur …..
  Sinon X prend la valeur …..
FinSi

Partie B

1°) $\text{E}(\text{X}) = ………..$ (écrire un seul résultat)

$\sigma(\text{X}) = ………..$ (écrire un seul résultat)

2°) $\text{E}(\text{X}) \geqslant 0$ pour ………………………

3°) $\text{E}(\text{X}) = -\dfrac{1}{2}$ pour ………………………

4°) a) …………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

b)

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

c) • Le plus petit entier naturel *n* tel que $\sigma(\text{X}) < 0{,}1$ est ………………….. .

• Le plus petit entier naturel *n* tel que $\sigma(\text{X}) < 0{,}01$ est ………………….. .

• Le plus petit entier naturel *n* tel que $\sigma(\text{X}) < 0{,}001$ est ………………….. .

Corrigé du contrôle du 29-11-2012

I. QCM

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**	**6°)**	**7°)**	**8°)**
Réponse	a	b	c	a	b	c	c	b

L'usage de la calculatrice permettait de gagner beaucoup de temps pour la détermination des racines des polynômes du second degré.
On pouvait aussi remarquer que dans les questions 1°) et 3°) nous avions le même polynôme du second degré à considérer.

Quelques explications :

3°) $(x+1)\left(x^2+x-2\right)>0$ (3)

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
SGN de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $(x+1)\left(x^2+x-2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_3=\left]-2\,;-1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$

5°) $\dfrac{2}{x}\leqslant x-1$ (5)

L'inéquation (5) est successivement équivalente à :

$\dfrac{2}{x}-x+1\leqslant 0$

$\dfrac{-x^2+x+2}{x}\leqslant 0$

Le polynôme $-x^2+x+2$ a pour racines – 1 et 2.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	0^{num}	$-$	
x		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+x+2}{x}$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$+$	0^{num}	$-$	

$S_5=\left[-1\,;0\right[\cup\left[2\,;+\infty\right[$

7°) $\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{2x}{x-1}$ (7)

(7) est successivement équivalente à :

$\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{1-x}>0$

$\dfrac{2x+1}{x-1}>0$

On dresse un tableau de signes.

$S_7=\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$

II. $f\,:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition D de *f*.**

On analyse les problèmes que pose l'expression de *f*.

Il y a deux types de problèmes pour cette fonction.

- présence d'un quotient (dénominateur non nul)

- présence d'une racine carrée (radicande positif ou nul)

$f(x)$ existe si et seulement si $\sqrt{x}-1\neq 0$ et $x\geqslant 0$

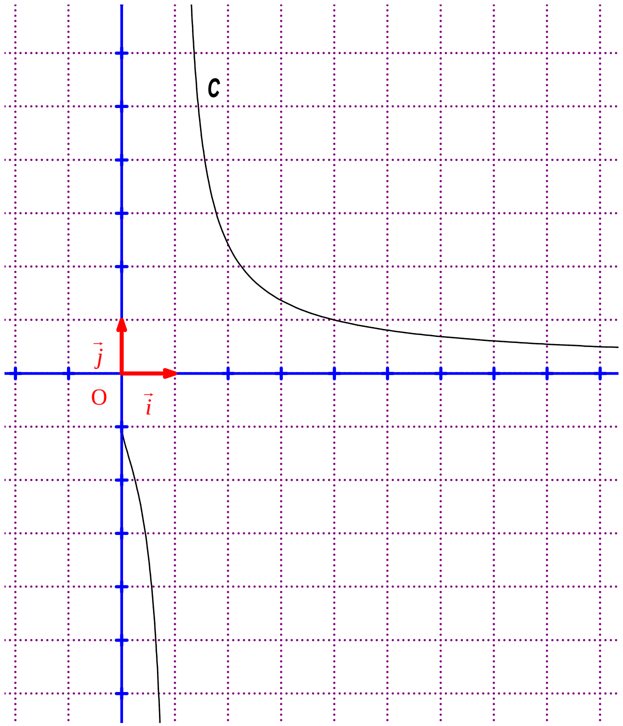
si et seulement si $x\neq 1$ et $x\geqslant 0$

$$\mathbf{D}=\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$$

Ou

D = $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

On vérifie ce résultat sur la calculatrice graphique en traçant la courbe représentative de la fonction *f*.



2°) **Étudions le sens de variation de *f* sur D.**

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗		↗	
$\sqrt{x}-1$	-1	↗ −	0	↗ +	
$f(x)$	-1	↘	‖	↘	

On vérifie les variations sur la calculatrice.

3°) **Déterminons le(s) antécédent(s) de 1 par *f*.**

On résout dans **D** l'équation $f(x)=1$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

$4 \in$ **D**

L'antécédent de 1 par *f* est égal à 4.

4°) **C** : courbe représentative de *f*

Rappel : pour qu'un point M appartienne à **C**, il faut et il suffit que l'on ait : $\begin{cases} x_M \in \mathbf{D} \\ y_M = \dfrac{1}{\sqrt{x_M}-1} \end{cases}$.

• **Déterminons si A(2 ; $\sqrt{2}+1$) appartient à C.**

$$f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)} \quad \text{(technique de quantité conjuguée)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{1}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

Donc **A(2 ; $\sqrt{2}+1$) ∈ C**.

Autre présentation possible :

$$\frac{1}{\sqrt{x_A}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

$$=y_A$$

Donc A ∈ **C**.

Remarque : on ne peut pas raisonner avec des valeurs approchées.

• **Déterminons si B(16 ; 0,333) appartient à C.**

$$f(16) = \frac{1}{\sqrt{16}-1}$$
$$= \frac{1}{3}$$
$$= 0,333\underline{3}...$$

$f(16) \neq 0,333$ donc **B(16 ; 0,333)** $\notin$ **C**.

Attention : on a $f(16) \approx 0,333$ (valeur approchée au dixième) mais l'égalité $f(16) = 0,333$ est fausse.

Quelques remarques d'élèves :

1. On peut même remarquer que $f(x_B) > y_B$ donc le point B n'est pas sur C.

2. Le point B est situé à proximité (!) de la courbe C mais ne lui appartient pas.

Raisonnements faux (trouvés dans des copies) :

1. $f(16) = \frac{1}{\sqrt{16}-1}$
$= \frac{1}{3}$

Donc $f(16) \approx 0,333$ d'où B $\in$ C.

2. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2,414213562$

$\sqrt{2}+1 = 2,414213562$

On a : $y_A = \frac{1}{\sqrt{x_A}-1}$ donc A $\in$ C.

3. $f(16) = \frac{1}{\sqrt{16}-1}$
$= \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 0,333$ donc B $\in$ C.

4. $f(16) = \frac{1}{\sqrt{16}-1}$
$= \frac{1}{3}$
$= 0,333$ arrondi au millième donc B $\in$ C.

(raisonnement faux : 0,333 n'est pas le résultat exact du quotient)

Attention au raisonnement suivant :

« $\frac{1}{3}$ est égal à 0,33 »

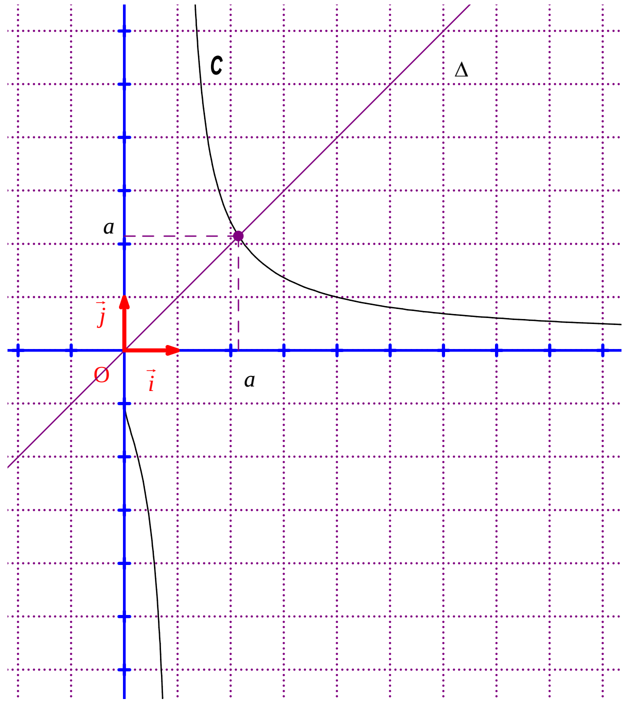
C'est pas exactement pas pareil (en mathématiques, on ne fait pas d'approximation).

5°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième du réel *a* confondu avec son image.**

On cherche le réel a vérifiant $f(a) = a$.

On représente la fonction f sur l'écran de la calculatrice ainsi que la fonction $g : x \mapsto x$.

g est représentée par une droite Δ.



On utilise la commande spéciale de la calculatrice permettant de déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de deux fonctions.

On obtient l'affichage suivant

• pour calculatrice TI :

X = 2,147899 Y = 2,147899

• pour calculatrice Casio GRAPH 35+ ($\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (G-Solv) $\boxed{\text{F5}}$ (ISCT)) :

$X = 2{,}147899036$ $\qquad$ $Y = 2{,}147899036$

Donc **la valeur arrondie au millième de *a* est 2,148**.

III.

RST est un triangle
K : milieu de [RS]
$\overrightarrow{TH} = -3\overrightarrow{TR}$
$3\overrightarrow{SL} = 2\overrightarrow{TL}$

1°) **Exprimons $\overrightarrow{TL}$ en fonction de $\overrightarrow{TS}$.**

L'égalité $3\overrightarrow{SL} = 2\overrightarrow{TL}$ donne successivement les égalités suivantes :
$3\overrightarrow{ST} + 3\overrightarrow{TL} = 2\overrightarrow{TL}$
$\overrightarrow{TL} = 3\overrightarrow{TS}$

2°) **Exprimons $\overrightarrow{TK}$ en fonction de $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$.**

K est le milieu de [RS].
Donc pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MK}$.
En particulier pour le point T on obtient $\boxed{\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TK}}$

Autre rédaction possible :

Notons D le point tel que TSDR est un parallélogramme.
On a $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TD}$ et K étant le milieu de [RS] est par définition également le milieu de [TD] d'où $\overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{TK}$. Finalement $\boxed{\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TK}}$

3°) **Exprimons $\overrightarrow{HL}$ en fonction de $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HL} &= \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TL}\\ &= 3\,\overrightarrow{TR} + 3\,\overrightarrow{TS}\end{aligned}$$

4°) **Déduisons-en que (HL) // (TK).**

On remarque que $\overrightarrow{HL} = 6\,\overrightarrow{TK}$

(ou : $\overrightarrow{HL} = 3\,\overrightarrow{TR} + 3\,\overrightarrow{TS}$
$\qquad = 6\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{TR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TS}\right)$
$\qquad = 6\overrightarrow{TK}$)

Donc vecteurs $\overrightarrow{HL}$ et $\overrightarrow{TK}$ sont colinéaires ; on en déduit que (HL) // (TK).

IV. $D_m : (2m-1)x - (m-1)y + 1 - 3m = 0$ $\quad$ (m : paramètre réel)

Il s'agit d'une famille de droites dépendant d'un paramètre (« faisceau de droites »).

1°)

Écrivons une équation cartésienne de D_{-2}.

Une équation cartésienne de D_{-2} est : $-5x + 3y + 7 = 0$.

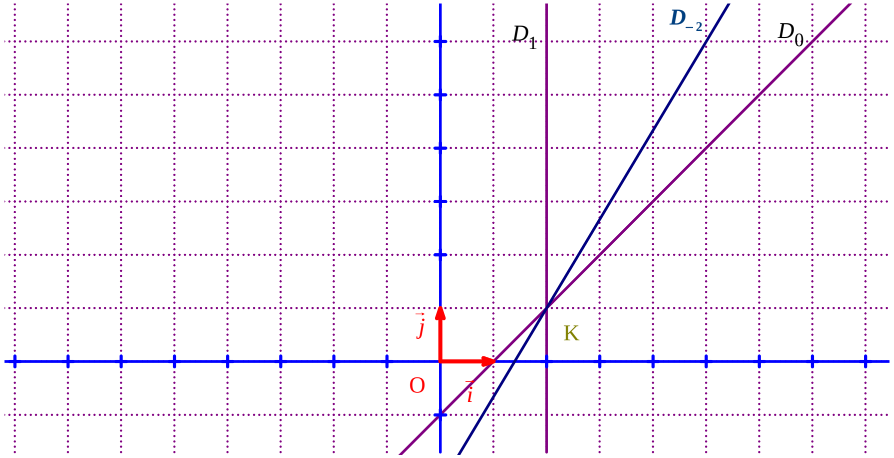
Traçons D_{-2} :

On cherche deux points de D_{-2} à coordonnées entières.

D_{-2} passe par les points de coordonnées (5 ; 6) et (– 1 ; – 4).

On peut aussi trouver l'équation réduite de cette droite.

$D_{-2} : y = \dfrac{5x-7}{3}$



2°) **Démontrons que toutes les droites D_m passent par un même point K.**

Le graphique précédent montre que les trois droites tracées passent toutes par le point de coordonnées (2 ; 1) donc on peut penser que toutes les droites D_m passent par le point K(2 ; 1).

On va démontrer que toutes les droites D_m passent par le point K(2 ; 1) c'est-à-dire que, pour tout réel m, le point K(2 ; 1) appartient à D_m.

$(2m-1)\times 2 - (m-1)\times 1 + 1 - 2m = 4m - 2 - m + 1 + 1 - 3m = 0$
Ainsi toutes les droites D_m passent par le point $\boxed{\text{K}(2\ ;\ 1)}$.

3°) a) **Déterminons pour $m \neq 1$, le coefficient directeur de D_m.**

$(2m-1)x-(m-1)y+1-3m=0$

$y=\dfrac{2m-1}{m-1}x+\dfrac{1-3m}{m-1}$

ainsi pour $m \neq -1$, le coefficient directeur de D_m est égal à $\dfrac{2m-1}{m-1}$.

b) **Déterminer m pour que D_m ait pour coefficient directeur 3.** .

D_m a pour coefficient directeur 3 si et seulement si $\dfrac{2m-1}{m-1}=3$

si et seulement si $2m-1=3(m-1)$

si et seulement si $2m-1=3m-3$

si et seulement si $m=2$

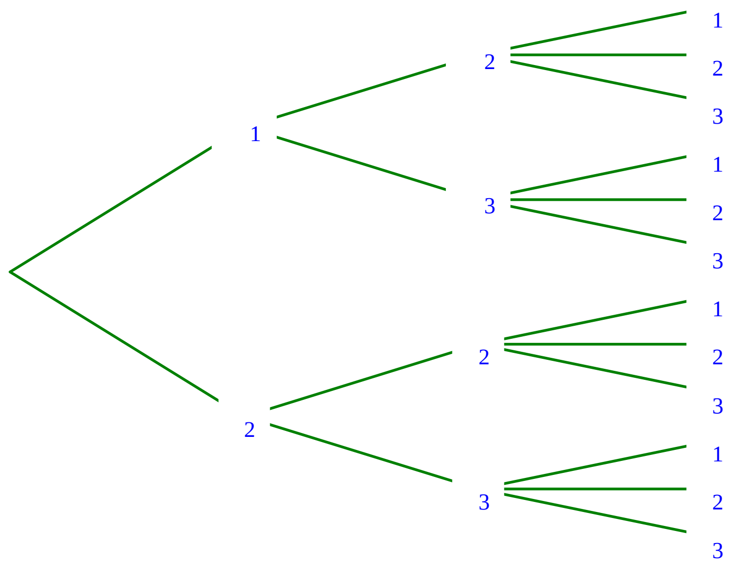
4°) **Déterminons m pour que D_m passe par le point A(3 ; – 1).**

A $\in D_m$ si et seulement si $(2m-1)\times 3-(m-1)\times(-1)+1-3m=0$

si et seulement si $m=\dfrac{3}{4}$

V.

1°) Le mieux est de faire un arbre de possibilités qui permettra de répondre aux questions suivantes.



On dresse la liste des issues :

(1 ; 2 ; 1), (1 ; 2 ; 2), (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 1), (1 ; 3 ; 2), (1 ; 3 ; 3), (2 ; 2 ; 1), (2 ; 2 ; 2), (2 ; 2 ; 3), (2 ; 3 ; 1), (2 ; 3 ; 2), (2 ; 3 ; 3).

Le nombre d'issues possibles est donc **12.**

2°)

• A : « $x \leqslant z$ »

Les issues qui réalisent A sont : (1 ; 2 ; 1), (1 ; 2 ; 2), (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 1), (1 ; 3 ; 2), (1 ; 3 ; 3), (2 ; 2 ; 2), (2 ; 2 ; 3), (2 ; 3 ; 2), (2 ; 3 ; 3).
Il y a 10 issues qui réalisent A.

$P\text{ (A)} = \dfrac{10}{12}$

$= \dfrac{5}{6}$

• B : « x, y et z sont deux à deux distincts »

Les issues qui réalisent B sont : (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 3 ; 1).

$P\text{ (B)} = \dfrac{3}{12}$

$= \dfrac{1}{4}$

• C : « $x+y+z=6$ »

Les issues qui réalisent C sont : (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 2 ; 2), (2 ; 3 ; 1).

$$P(\text{B}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

3°) $P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P(\text{B} \cap \text{C}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P(\text{A} \cup \text{C}) = \frac{11}{12}$

$P(\text{B} \cup \text{C}) = \frac{1}{3}$

• A ∩ C : « $x \leqslant z$ et $x+y+z=6$ » (2 conditions en même temps)

Les issues qui réalisent A ∩ C sont : (2 ; 2 ; 2), (2 ; 3 ; 2), (1 ; 2 ; 3).

$P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

• B ∩ C : « x, y et z sont deux à deux distincts et $x+y+z=6$ »

Les issues qui réalisent B ∩ C sont : (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 3 ; 1).

$P(\text{B} \cap \text{C}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

• A ∪ C : « $x \leqslant z$ ou $x+y+z=6$ »

$$\begin{aligned} P(\text{A} \cup \text{C}) &= P(\text{A}) + P(\text{C}) - P(\text{A} \cap \text{C}) \\ &= \frac{10}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

• B ∪ C : « x, y et z sont deux à deux distincts ou $x+y+z=6$ »

$$\begin{aligned} P(\text{B} \cup \text{C}) &= P(\text{B}) + P(\text{C}) - P(\text{B} \cap \text{C}) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

VI.

Partie A

$n = 10$

Il y a donc 11 boules au total dans l'urne.

1°) X peut prendre les valeurs $x_1 = 10$ et $x_2 = -1$.

x_i	10	– 1	
$P(\text{X} = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$	Total = 1

2°) E(X) = 0

$\sigma(\text{X}) = \sqrt{10}$

On peut vérifier ces résultats à la calculatrice (en utilisant les touches statistiques).
Mais attention, pour l'écart-type, la calculatrice donnera seulement une valeur approchée et non la valeur exacte.

3°)

```
Traitement et sortie :
a prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 11
Si a = 1
   Alors X prend la valeur 10.

   Sinon X prend la valeur – 1.
FinSi
```

Partie B

1 boule noire

***n* boules blanches**

Il y a donc $n+1$ boules dans l'urne.

1°) $\text{E(X)} = \frac{10-n}{n+1}$

$\sigma(\text{X}) = \frac{11\sqrt{n}}{n+1}$

Justification :

x_i	10	-1	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$	Total = 1

$$\mathrm{E}(X) = \frac{10}{n+1} - \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{10-n}{n+1}$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{100}{n+1} + \frac{n}{n+1} - \left(\frac{10-n}{n+1}\right)^2$$
$$= \frac{100+n}{n+1} - \left(\frac{n-10}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{(100+n)(n+1)-(n-10)^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{121n}{(n+1)^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$
$$= \sqrt{\frac{121n}{(n+1)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{121}\times\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^2}}$$
$$= \frac{11\sqrt{n}}{n+1} \qquad (n+1<0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^*)$$

2°) **Déterminons les entiers naturels n tels que E(X) $\geqslant 0$.**

E(X) $\geqslant 0$ signifie que $\frac{10-n}{n+1} \geqslant 0$.

Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n + 1 > 0$.

D'où $10 - n \geqslant 0$ soit $n \leqslant 10$.

Donc E(X) $\geqslant 0$ pour $n \leqslant 10$.

Autre méthode :

On pourrait aussi résoudre l'inéquation $\frac{10-x}{x+1} \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$ grâce à un tableau de signes.

3°) **Déterminons l'entier naturel n tel que E(X) = $-\frac{1}{2}$ (2).**

(2) est successivement équivalente à

$$\frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2}$$
$$2(10-n) = -(n+1)$$
$$20 - 2n = -n - 1$$
$$21 = n$$

Donc E(X) = $-\frac{1}{2}$ pour $n = 21$

4°)

a) **Démontrons que pour tout entier naturel n non nul on a : $\sigma(X) \leqslant \frac{11}{2}$.**

On étudie le signe de la différence $\sigma(X) - \frac{11}{2}$.

$$\sigma(X) - \frac{11}{2} = \frac{11\sqrt{n}}{n+1} - \frac{11}{2}$$
$$= 11\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 11 \times \frac{2\sqrt{n} - n - 1}{2(n+1)}$$
$$= 11 \times \frac{-\left(\sqrt{n}-1\right)^2}{2(n+1)}$$
$$= -11 \times \frac{\left(\sqrt{n}-1\right)^2}{2(n+1)}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ donc $2(n+1) > 0$ et $\left(\sqrt{n}-1\right)^2 \geqslant 0$ d'où $\frac{11\sqrt{n}}{n+1} - \frac{11}{2} \leqslant 0$

b) $f : x \mapsto \dfrac{11\sqrt{x}}{x+1}$ définie sur [0 ; + ∞[

• Représentons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{11\sqrt{x}}{x+1}$ définie sur [0 ; + ∞[sur l'écran de la calculatrice.

On représente la fonction *f* sur l'écran de la calculatrice.
On obtient le tableau de variation suivant.

x	0		1		+ ∞
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{11}{2}$	↘	

• Retrouvons le résultat de la question précédente.

D'après le tableau de variation, le maximum de *f* est égal à $\dfrac{11}{2}$.

Or $\sigma(X) = f(n)$.

Donc $\sigma(X) \leqslant \dfrac{11}{2}$.

c) • Le plus petit entier naturel n non nul tel que $\sigma(X) < 0{,}1$ est 12 098.

• Le plus petit entier naturel n non nul tel que $\sigma(X) < 0{,}01$ est 1 209 999.

• Le plus petit entier naturel n non nul tel que $\sigma(X) < 0{,}001$ est 120 999 998.

Remarque :

Avec XCas la résolution des inéquations donne :

$\dfrac{11\sqrt{x}}{x+1} < 0{,}1$ $\qquad$ $x > 12097{,}9999173$

$\dfrac{11\sqrt{x}}{x+1} < 0{,}01$ $\qquad$ $x > 1\,209\,998{,}0$

$\dfrac{11\sqrt{x}}{x+1} < 0{,}001$ $\qquad$ $x > 120\,999\,998{,}0$

La résolution est donc moins précise avec XCas que celle donnée dans l'énoncé (faite avec la calculatrice TI N-spires).